BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

L'Huilier, Simon Antoine Jean, 1750-1840

Lhuilier's Professor der Mathematik in Genf, Anleitung zur ElementarAlgebra

Bd.: 1.

Tübingen (1799)

Math.p. 314-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082310-9
VD18 90261968

Simon

Lhuilier's,

Professor der Mathematik in Genf,

Anleitung zur ElementarAlgebra.

Erster Theil.

Tübingen,
in der J. G. Cotta'schen Buchhandlung. 1799.

Wd
185-D

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Die Anzahl der Anleitungen zur Erlernung der ElementarAlgebra ist so groß, daß ich es nicht gewagt haben würde, sie mit einer neuen zu vermehren, wenn verschiedene meiner Freunde nicht geglaubt hätten, die Art und Weise, die in meiner vor zwanzig Jahren von mir polnisch herausgegebenen und von der Warschauer ErziehungsCommission mit ihrem Beifall beehrten Algebra zum Grund gelegt ward, verdiente, auch bei uns angewendet zu werden.

Der Gang, den ich in diesem Werke befolgte, stimmt mit dem Unterricht überein, den ich in meiner Jugend von meinem Verwandten und Lehrer, Herrn Lesage, dessen Sorgfalt ich stets mit dem lebhaftesten und verdientesten Dank erkennen werde, zu geniessen so glüklich war. Dieser philosophische Mathematiker glaubte mit Recht, daß ein HauptNuzen des mathematischen Studiums in dem logischen Vortheil liegt, den man daraus ziehen

kann; er bemühete sich daher mehr die Beurtheilungskraft seiner Schüler zu bilden und ihren Verstand zu üben, als aus ihnen fertige Calculatoren und ausgemachte Mathematiker zu machen. Mit Grund hielt er den logischen Theil der Mathematik von allgemeinem Nuzen und Anwendung, die Zahl derjenigen Zöglinge aber für sehr eingeschränkt, welche dazu berufen sind, nach dem Unterricht in den Elementen der Mathematik diese Wissenschaft noch ganz zu ergründen; und glaubte, daß diese, ihren eigenen Kräften überlassen, selbst große Fortschritte machen können, wenn sie durch einfache und häufige Uebungen und durch einleuchtende Entwiklung der ersten Grundsäze dazu vorbereitet worden sind.

Inhalt.

Erstes Capitel.

Aufgaben vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe. Seite 1.

Zweytes Capitel.

Aufgaben vom ersten Grade mit zwey oder mehr unbekannten Größen. — 103.

Drittes Capitel.

Von den geometrischen Proportionen. — 133.

Viertes Capitel.

Von der Erhebung ins Quadrat; Ausziehung der Quadratwurzel; und von den incommensurablen Größen. — 160.

Fünftes Capitel.

Aufgaben vom zweiten Grade. Seite 188.

Erster Abschnitt.

Aufgaben, deren Auflösung nur von reinen quadratischen Gleichungen abhängt. — 189.

Zweyter Abschnitt.

Vollständige (unreine) Gleichungen vom zweyten Grade. — 220.

Dritter Abschnitt.

Von den biquadratischen Gleichungen, die sich auf den zweyten Grund reduciren lassen. — 290.

Erstes Capitel.

Aufgaben vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe.

§. 1.

Der Arithmetiker beschäftiget sich nur mit Zeichen bekannter Größen, um unbekannte Größen, als das lezte Resultat seiner Arbeit zu finden. Der Algebraist behandelt hingegen ohne Unterschied die Zeichen bekannter und die Zeichen unbekannter Größen, und sezt sein Verfahren mit den einen und den anderen fort, bis er endlich die leztere auf die einfachste Art in den ersteren ausgedrükt erhält. Diß ist eine der Verschiedenheiten, wodurch die Verfahrungsarten bei der Algebra von denjenigen bei der Arithmetik abweichen; und von dieser ersten Verschiedenheit allein werde ich für jezt handeln.

Dem ersten Anblik nach scheint diese erste Verschiedenheit manche Schwierigkeiten zu verursachen, allein sie werden, wo nicht ganz gehoben, doch gewis sehr vermindert, wenn man bedenkt, wie die Wahl der Zeichen unserer Begriffe, und besonders derer, wodurch die Größen dargestellt werden, fast ganz von unserer Willkühr abhangen. Betrachtungen, wozu schon die Arithmetik genug Anlaß gibt.

Einer der großen Vortheile, welchen die abgekürzten arithmetischen Bezeichnungen der Vielheiten gewähren, deren man sich statt der in der gemeinen Sprache üblichen Benennungen bedient, beruhet darauf, daß sie sehr einfach sind. Dadurch wird es dem Verstand so leicht, sich den Begrif der durch jene Bezeichnungen ausgedrükten Größen zu vergegenwärtigen. Auf dem gleichen Grund der Einfachheit beruhet die Einführung der zur Darstellung unbekannter Größen gewählten Zeichen. Wäre unser Verstand weniger beschränkt, so hätten wir nicht nöthig, zu einem solchen Hülfsmittel unsre Zuflucht zu nehmen: und Wesen von höherer GeistesVollkommenheit als wir, könnten die Verbindung des Gegebenen mit dem Gesuchten sogleich und ohne den Gebrauch der Mittel übersehen, deren Anwendung die Unvollkommenheit unserer gegenwärtigen Verstandeskräften erfordert.

Um es bemerkbarer zu machen, daß die Einführung neuer Zeichen für unbekannte Größen in vielen Fällen eine Sache der Bequemlichkeit und nicht der unbedingten Nothwendigkeit seye, werde ich lange Zeit eine Vergleichung folgender zwey Methoden anstellen. Die eine beschränkt sich wie die Arithmetik auf Schlüsse aus und mit den bekannten Größen, ohne daß man einigen Gebrauch von Ausdrücken der unbekannten Größen zu machen scheint. Dieses Verfahren wird die **Methode des Räsonnements**, welches durchgehends dabey erfordert wird, oder das **arithmetische Verfahren** heissen. Bey der andern Methode werden wir uns der Zeichen unbekannter Größen bedienen, und mittelst weniger allgemeinen, gehörigen Orts zu entwicklenden, Regeln auf eine sicherere Art zum vorgesezten Zwek gelangen. Dieses **Verfahren** wird das **algebraische** heissen.

Diese doppelte Behandlung ist desto nüzlicher, als vermittelst derselben die Erlernung der Algebra eine fast ununterbrochene Uebung **praktischer Logik** wird; und dadurch einen Vortheil gewähret, der bey dem Studium der Mathematik für junge Leute um so höher in Anschlag

zu nehmen ist, als es der Hauptnuzen ist, den die meiste derselben daraus zu ziehen haben.

Wir dörfen uns aber nicht schmeicheln, immer jene beyde Verfahren anwenden zu können. Es gibt viele Aufgaben, die zu verwickelt sind, als daß wir sie durch bloses Räsonnement, ohne Gebrauch der Mittel und praktischen Regeln, welche die Algebra uns darbietet, auflösen könnten. Es ist daher von Wichtigkeit, sich an einfachen Aufgaben in der Anwendung dieser Hülfsmittel und Regeln zu üben, um durch die Fertigkeit in ihrem Gebrauch die Schwierigkeit ihrer Anwendung auf verwickeltere Aufgaben zu vermindern. Besonders kommen in den physisch-mathematischen Wissenschaften viele Fälle vor, wo die Benuzung jener Hülfsmittel und Regeln unumgänglich nöthig zu seyn scheint. Selbst alsdann, wenn wir bey einer seltenen Vollkommenheit unsers Verstandes dergleichen Schwierigkeiten durch blosses Räsonnement heben könnten, muß man doch gestehen, daß das Verfahren dabey meistens zu weitläufig und zu wenig allgemein seyn würde. Es ist aber, besonders in der angewandten Mathematik, oft das Wichtigste, daß man, und zwar auf die kürzeste Art, zu seinem Zwek gelange.

§. 2.

Aufgabe. Von zwey Personen, (die ich durch A und B bezeichnen will) hat die erste noch einmal so viel, als die zweyte. Ueberdiß weiß man, daß jene zwölf Gulden mehr hat, als diese. Wieviel hat jede?

In dieser Frage kommen zwey unbekannte Größen vor, nämlich das Vermögen jeder der zwey Personen. Sie enthält aber auch, um dieselbe zu bestimmen, zwey bekannt gemachte Angaben; nämlich den Unterschied des beyderseitigen Vermögens, und, wie vielmal das größere Vermögen das kleinere enthält. Jede dieser Bestimmungen für sich läßt die Frage unentschieden: so daß es so viel Größen giebt, als man will, welche jeder derselben einzeln ge-

nommen, Genüge thun. Es gibt aber nur zwey Größen, die beyden Bedingungen zugleich entsprechen.

Diejenigen Bestimmungen, welche die unbekannten Größen betreffen, machen den sogenannten Fragestand (status quæstionis) aus. Hierauf folgt die eigentlich so genannte Frage, wodurch man die Größen zu wissen verlangt, welche dem vorgelegten Fragestand Genüge leisten. Beyde Theile zusammen machen den Vortrag der Aufgabe aus.

Ist die Anzahl der von einander unabhängigen Angaben oder Bedingungen der Anzahl der unbekannten Größsen gleich; so ist die Aufgabe bestimmt. Hingegen ist sie unbestimmt, wenn die Anzahl der, von einander unabhängigen, Bedingungen kleiner ist, als die Zahl der unbekannten Größen. Dieser Unterschied wird sich in der Folge aufklären.

Ich gehe nun zu der vorgelegten Frage über.

Erstes Verfahren; durch Räsonnement. Weil A noch einmal soviel hat, als B; so ist der Ueberschuß des erstern Vermögens über das zweyte diesem zweyten gleich. Es beträgt aber dieser Ueberschuß 12 Gulden. Folglich ist das zweyte Vermögen, oder das Vermögen von B 12 Gulden; und das Vermögen von A, welches das doppelte davon ist, macht 24 Gulden aus. Die zwey Zahlen 24 und 12 haben auch wirklich die beyden angegebenen Eigenschaften: nämlich 24 ist das doppelte von 12; und der Ueberschuß von 24 über 12 ist 12.

Zweytes Verfahren; algebraisch. Mann kann das Vermögen der weniger besizenden Person durch irgend ein willkührliches Zeichen andeuten. Die Mathematiker sind übereingekommen, die unbekannte Größen durch einen der lezten Buchstaben des Alphabets zu bezeichnen, z. B. durch x.

Man bezeichne also das Vermögen von B durch x (Gulden). Das Vermögen von A, welches das Ver-

mögen von B um zwölf Gulden übersteigt, wird durch x, vermehrt um zwölf Gulden, bezeichnet; welches man so ausdrukt: $x+12$ (indem das Zeichen + die Addition anzeigt, und durch mehr oder *plus* ausgesprochen wird.) Weil nun das Vermögen von A das doppelte des Vermögens von B ist: so wird auch das Vermögen von A durch das mit zwey multiplicirte x oder durch zweymal x bezeichnet; welches man so ausdrükt: $2 \times x$ (wo das Zeichen $\times$ die Multiplication anzeigt, und durch mal ausgesprochen wird), oder kürzer so: $2x$ (welches man zwey x ausspricht, eben so wie man 2 Thaler liest zwey Thaler.)

Das Vermögen von A ist demnach auf zweyerley Art ausgedrükt; nämlich durch $2x$, und durch $x+12$. Diese zwey, einerley Größe bezeichnende, Ausdrücke müßen ihrer Größe nach gleichbedeutend seyn; die Größe $2x$ ist daher gleich $x+12$, welches man so schreibt: $2x=x+12$ (indem das Zeichen = die Gleichheit der zwey Größen, zwischen welchen es steht, anzeigt; und ausgesprochen wird: ist gleich).

Sind zwey Größen gleich, und nimmt man von jeder einerley Größe weg, so sind die Ueberreste gleich. Folglich, da $2x=x+12$; so werden, wenn man auf beyden Seiten die Größe x hinwegnimmt, die Ueberreste x und 12 gleich seyn: also ist $x=12$. Nun bezeichnete x das Vermögen von B, dieses ist also 12; und das Vermögen von A, welches das Doppelte davon, oder um 12 größer ist, macht in beyden Fällen 24.

Zweytes Beyspiel. A hat dreymal so viel als B. Ueberdieß weiß man, daß A 18 Gulden mehr hat als B. Wieviel hat jede?

Durch Räsonnement. Weil A dreymal so viel hat, als B; so ist der Ueberschuß des Vermögens von A über das von B das Doppelte des Vermögens von B. Dieser Ueberschuß aber ist 18 Gulden, folglich beträgt das doppelte Vermögen von B 18 Gulden; und das einfache Vermögen von B, welches die Hälfte seines doppelten ist,

macht die Hälfte von 18 Gulden, das ist 9 Gulden aus. Das Vermögen von A, beydes als das Dreyfache des Vermögens von B, und in so fern es dasselbe um 18 Gulden übersteigt, ist also 27.

Algebraisch. Vermögen von B . . x
Vermögen von A . . $3x$ oder $x+18$
folglich . . . . . $3x=x+18$.
Auf beyden Seiten die nämliche Größe x
abgezogen, bleibt . . . . . . $2x=18$.
Sind nun zwey Größen einander gleich, so sind auch ihre Hälften gleich. Es ist also, wenn man auf beyden Seiten mit zwey dividirt, ... $1x=9$;
demnach Vermögen von B 9
. . . . A . . . . . 27.
Diese Zahlen thun den zwey Bedingungen Genüge, welche den Fragestand ausmachen.

Andere Beyspiele. Das Vermögen von A ist das 4, 5, 6, 7... fache des Vermögens von B; und der Unterschied ihres beyderseitigen Vermögens ist 60, 80, 100, 144.....

§. 3.

Ueberdenkt man das algebraische Verfahren, das zur Auflösung der bisherigen Fragen geführt hat; so wird man fünf verschiedene Theile dabey wahrnehmen.

In dem ersten hat man den unbekannten Größen Namen gegeben. Diese Namen waren zum theil willkührlich, wie der Ausdruk für das Vermögen von B. Aber die Bezeichnung der zweiten gesuchten Größe wurde aus diesem ersten willkürlichen Ausdruk, und aus den, in dem Fragestande bekannt gemachten, Angaben hergeleitet. Hiebey ist der Anfang mit der Benennung des kleineren Vermögens gemacht worden. So wurde das größere durch eine Addition oder Multiplication bestimmt. Hätte man dagegen das größere Vermögen zuerst benennt: so würde das klei-

nere durch eine Subtraction oder Division, also durch Behandlungsarten bestimmt worden seyn, die Beziehungsweise schwerer sind, als die vorhin angewendete Addition und Multiplication. Diese Aufmerksamkeit, den Anfang der Benennung mit den kleineren Größen zu machen, welcher zufolge die anderen durch Addition oder Multiplication bestimmt werden, kürzt oft die folgende Operationen ab, und vereinfacht zugleich die Ausdrücke der unbekannten Größen. (Es wird dienlich seyn, sich dieser Bemerkung öfters, besonders bey verwickelten Fragen zu erinnern.)

Dieser Theil der Untersuchung kann die Benennung heißen; weil er darinn besteht, den unbekannten Größen Namen zu geben.

In dem zweyten Theil hat man die Einerleyheit oder Gleichheit zweyer Ausdrücke einer und derselben Größe angezeigt. Diese Anzeige heißt eine Gleichung. Die zwey Größen, welche durch das Zeichen der Gleichheit von einander getrennt sind, können die Absätze (membra) der Gleichung heissen. Sind diese Absätze aus mehreren Theilen zusammengesezt, so heißt jeder derselben ein Glied (terminus), diesen zweyten Theil werden wir die Bedingung nennen; weil er immer einige der in dem Fragestand angegebenen Kenntnisse oder Bedingungen ausdrükt.

In dem dritten Theil hat man die Gleichung vereinfacht, so daß das Zeichen der unbekannten Größe von jeder andern damit verbundenen Größe, befreyt wurde. Die allgemeine Regel hiebey ist, daß man diese Verbindungen durch Anwendung der entgegengesezten RechnungsArten aufhebt. So hat man in der Gleichung $3x = x + 18$, wo x auf beiden Seiten des GleichheitsZeichens vorkam, durch Abziehen von 1x auf beyden Seiten bewirkt, daß x nur auf einer Seite vorhanden war: hiedurch erhielte man nämlich die Gleichung $2x = 18$. In dieser verknüpfte die Multiplication das Zeichen der unbekannten Größe mit 2, wovon man es durch beyderseitige Division mit 2 befreyte, und so die Gleichung $x = 9$ erhielte. Dieser dritte Theil

soll die **Reduction** genannt werden: welche darinn besteht, daß man zu Vereinfachung der Gleichung diejenigen Rechnungsarten vornimmt, wodurch die unbekannte Größe allein, als bekannten Größen gleich, dargestellt wird.

Alsdenn ist man zu dem vierten Theil gelangt, welcher die Auflösung heißt. Dieser enthält die Antwort auf die vorgelegte Frage; oder die Ausdrücke der vorhin unbekannten Größen in bekannten.

Endlich untersucht man in dem fünften und lezten Theil, ob die in bekannten Größen durch die Auflösung angegebenen Ausdrücke der gesuchten Größen dem Fragestande wirklich entsprechen, oder ob die Aufgabe richtig aufgelöst sey. Dieses Verfahren heißt die **Verification** oder **Probe**.

Ich will hievon die Anwendung auf eine der vorangehenden Aufgaben machen.

A hat viermal so viel als B; auch weiß man, daß A 60 Gulden mehr hat, als B.

Benennung. Vermögen von B . . x
Vermögen von A . . $4x$ oder $x+60$.

Bedingung. $4x = x+60$.

Reduction. $3x = 60$ (indem man auf jeder Seite x ab zieht)
$1x = 20$ (indem man auf beyden Seiten durch 3 dividirt)

Auflösung. $1x = 20$. Vermögen von B.
$4x = 80$. Vermögen von A.
$x+60 = 80$. Zweyter Ausdruk des Vermögens v. A.

Probe. $80 = 80$. Oder die zwey Ausdrücke des Vermögens von A sind gleich; die Aufgabe ist also richtig aufgelöst.

Anderes Beyspiel. Ein Vater ist um achtzehn Jahre älter als sein Sohn. Ueberdieß weiß man, daß das Al-

ter des Sohns zwey Drittel ist, von dem Alter seines Vaters. Wie alt ist jeder? *)

Arithmetisch. Weil das Alter des Sohns zwey Drittel ist von dem Alter des Vaters; so ist der Vater ein und ein halbmal so alt, als der Sohn. Folglich ist der Ueberschuß des Alters des Vaters über das Alter des Sohns, die Hälfte von dem Alter des Sohns. Dieser Ueberschuß beträgt aber 18 Jahre. Demnach ist das halbe Alter des Sohns 18 Jahre, und sein Alter, das doppelte von 18 oder 36: das Alter des Vaters aber ist 54 Jahre.

Oder: Da das Alter des Sohns zwey Drittel ist von dem Alter des Vaters; so ist der Ueberschuß des Alters des Vaters über das des Sohns, ein Drittel von dem Alter des Vaters. Dieser Ueberschuß aber macht 18 Jahre aus. Folglich macht ein Drittel des Alters des Vaters 18 Jahre: und das Alter des Vaters ist 54 Jahre; wie vorhin.

Algebraisch.

Ben. Alter des Vaters . . x
. . . Sohns . . $\frac{2}{3}x$

Bed. $x = \frac{2}{3}x + 18$

Red. $\frac{1}{3}x = 18$ (indem man auf jeder Seite $\frac{2}{3}x$ abzieht)
$x = 54$ (indem man beyde Seiten mit 3 multiplicirt)

Auflös. $x = 54$ Alter des Vaters
$\frac{2}{3}x = 36$ Alter des Sohns.

Probe. $54 = 36 + 18$.

*) Diese Aufgabe unterscheidet sich von den vorhergehenden nur durch den gebrochenen Ausdruk der bekannten Größen. Ich seze voraus, die Schüler seyen hinlänglich in der Rechenkunst geübt, so daß dieser Unterschied keine Schwierigkeiten für sie mache. Will aber der Lehrer die algebraischen Uebungen als Hülfsmittel zur Fertigkeit in den arithmetischen Rechnungen mit ganzen Zahlen gebrauchen (welches mit Nuzen, besonders bey PrivatUnterricht, geschehen kann): so wird es leicht seyn, die Beyspiele mit Brüchen zu verschieben, bis die jungen Leute sie zu bearbeiten im Stande seyn werden.

Anmerkung. Bezeichnete man das Alter des Vaters mit einer durch 3 theilbaren Zahl, z. E. mit 3x; so würde man die Brüche vermeiden.

Ben. Alter des Vaters 3x
. . . Sohns .... 2x.

Bed. $3x = 2x + 18$.

Red. $1x = 18$ (indem man auf beyden Seiten 2x abzieht)

Aufl. $3x = 54$ Alter des Vaters
$2x = 36$ Alter des Sohns.

Probe. $54 = 36 + 18$.

Andere Beyspiele. Das Vermögen zweyer Personen A und B ist so beschaffen, daß das Vermögen von B $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$ .... ist des Vermögens von A; der Unterschied ihres Vermögens aber 24, 30, 20, 32 .... Gulden beträgt.

Es legt jemand bei einem Gewerbe ein Drittel seines Vermögens, und bey einem andern ein Viertel desselben an. Zu dem erstern gibt er 1000 Gulden mehr, als zu dem zweyten. Was ist sein Vermögen?

Anmerk. Man wird die Brüche bey dem algebraischen Verfahren vermeiden, wenn man das Vermögen dieser Person durch eine zugleich mit 3 und 4theilbaren Zahl bezeichnet, nämlich durch 12x.

Ein Kaufman findet bey Vergleichung seiner Ausgabe und seines Gewinns, daß jene $\frac{2}{9}$, und dieser $\frac{2}{7}$ seines Vermögens ausmacht. Auch findet er, daß sein Gewinn seine Ausgabe um 400 Gulden übersteigt. Was beträgt sein Vermögen?

Anmerk. Bezeichnet man das Vermögen dieses Kaufmanns durch 63x, so vermeidet man die gebrochene Ausdrücke.

§. 4.

Aufgabe. A und B haben mit einander 24 Gulden. A hat noch einmal so viel als B. Wieviel hat jeder?

Arithmetisch. Weil A das doppelte von B hat, so ist die Summe ihres Vermögens das dreyfache des Vermögens von B. Die Summe ihres Vermögens macht aber 24 Gulden. Folglich ist das dreyfache Vermögen von B 24 Gulden; und sein einfaches Vermögen ist das Drittel von 24, also 8 Gulden. Das Vermögen von A, welches das doppelte davon ist, beträgt 16 Gulden. Die Summe von beyden ist, wie erfordert wird, 24 Gulden.

Algebraisch. Ben. Vermögen von B x
. . . . . . A . . . . $2x$
Summe . . . $3x$.

Bed. $3x = 24$.

Red. $1x = 8$ indem man beyderseits durch 3 dividirt.

Aufl. $1x = 8$ Vermögen von B
$2x = 16$ Vermögen von A
$3x = 24$ Summe.

Probe. $24 = 24$.

Andere Beyspiele. A ist 3 4 5 6 . . . . . mal so reich als B. Die Summe ihres Vermögens ist 36, 40, 48, 49 . . . . . .

Das Vermögen von B ist $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{8}$ . . . . des Vermögens von A. Die Summe ihres Vermögens beträgt 800, 1210, 1960, 1690 . . . . .

Beyspiel der Behandlung der Aufgaben mit Brüchen:

Das Vermögen von B ist $\frac{3}{5}$ des Vermögens von A; und die beyde zusammen haben 800 Gulden. Da das Vermögen von B $\frac{3}{5}$ des Vermögens von A ist; so macht beyder Vermögen zusammen die Summe des Vermögens von A und der $\frac{3}{5}$ eben dieses Vermögens, das ist $\frac{8}{5}$ des Vermögens von A. Aber diese Summe ist 800 Gulden. Folglich machen $\frac{8}{5}$ des Vermögens von A 800 Gulden; also $\frac{1}{5}$ davon 100 Gulden. Das Vermögen von A, welches fünfmal sein fünfter Theil ist, beträgt demnach 500 Gulden. Vermögen von B, 300 Gulden. Summe des beyderseitigen Vermögens $500 + 300 = 800$.

Algebraisch. Ben. Vermögen von A x
. . . . B . . . . $\frac{3}{5}x$.

Bed. $x+\frac{3}{5}x=800$.

Red. $5x+3x=4000$ (indem man auf jeder Seite mit 5 multiplic.)
oder $8x=4000$
$1x=500$ (indem man auf jeder Seite mit 8 dividirt.)

Aufl. $1x=500$ Vermögen von A
$\frac{3}{5}x=300$ Vermögen von B
$x+\frac{3}{5}x=800$. Summe des beyderseitigen Vermögens.

Probe. $800=800$.

Anmerkung. Drükt man das Vermögen des A durch $5x$ aus; so vermeidet man die gebrochenen Ausdrücke.

§. 5.

Aufgabe. Zwey Personen A und B, die 96 Meilen weit von einander entfernt sind, gehen einander entgegen. Die erste macht täglich sieben Meilen; die zweyte macht täglich 5 Meilen. Nach wieviel Tagen werden sie sich begegnen; und wieviel Meilen wird alsdann jede gemacht haben?

Arithmetisch. Diese zwey Personen nähern sich einander mit jedem Tag um die Summe von 7 und 5 Meilen, das heißt, um 12 Meilen. Um zusammen zu treffen, haben sie also während so viel Tage zu gehen, daß 12 Meilen ebensovielmal wiederholt 96 Meilen machen: folglich muß diese Anzahl der Tagreisen sich ergeben, wenn man 96 durch 12 dividirt. Der Quotient ist 8.

Anzahl der zugebrachten Tage . . . 8
Zurükgelegter Weg der Person A . $8\times7=56$ Meilen
. . . . . . B . $8\times5=40$
Weg beyder zusammen . . . . 96.

Algebraisch. Ben. Tagreisen x
Weg der Person A . . $7x$
. . . . . . B . . . $5x$
ganzer Weg . . . . . $12x$

Bed. $12x = 96$.

Red. und Aufl. $1x = 8$ Tagreisen
$7x = 56$ Weg der Person A
$5x = 40$ Weg der Person B
$12x = 96$ Ganzer Weg.

Anmerkung. Diese Aufgabe ist im Grunde einerley mit der im vorhergehenden §. Nämlich da A täglich 7, und B 5 Meilen macht: so ist der Weg, den B in irgend einer Zeit macht, $\frac{5}{7}$ des Wegs, den A in der nämlichen Zeit macht; und die Summe des von beyden zurükgelegten Weges ist $\frac{12}{7}$ des Wegs, welchen A gemacht hat. Folglich betragen $\frac{12}{7}$ des Wegs von A 96; $\frac{1}{7}$ seines Wegs macht $\frac{1}{12}$ von 96 oder 8; und der ganze von A zurükgelegte Weg ist $7 \times 8 = 56$ Meilen.

Andere Beyspiele. Zwey Personen treten in Gesellschaft: die eine legt 5000, und die andere 9000 Gulden ein. Sie gewinnen damit 700 Gulden. Wieviel gehört jeder von diesem Gewinn?

Zwey um 340 Meilen entfernte Personen kommen einander entgegen. Die eine macht zwey Meilen in drey Stunden, und die andere drey Meilen in vier Stunden. Wann werden sie einander begegnen?

Anmerkung. Um die Aehnlichkeit dieses Beyspiels mit den vorhergehenden zu zeigen, darf man nur die Angabe der Geschwindigkeiten dieser Personen auf einerley Zeit reduciren, z. B. auf 12 Stunden, in welcher sie 8 und 9 Meilen zurüklegen. Folglich ist die Geschwindigkeit der erstern $\frac{8}{9}$ von der Geschwindigkeit der zweyten. Und eben so ist der Weg, den die erste in einer gewißen Zeit zurüklegt, $\frac{8}{9}$ des Wegs, den die andere in der nämlichen Zeit macht.

Es stellt jemand eine gewiße Anzahl Arbeiter an, und bezahlt jedem derselben 16 Kreuzer. Von einer gleichen Anzahl Arbeiter gibt er aber jedem nur 12 Kreuzer. Zu-

sammen bezahlt er nun 252 Kreuzer. Wieviel sind es Arbeiter?

§. 6.

Aufgabe. Ein Dieb entflieht, und macht täglich sieben Meilen. Nach acht Tagen verfolgt ihn ein Häscher von dem nämlichen Ort aus, und legt jeden Tag neun Meilen zurük. Wann wird der Häscher den Dieb einholen; und welchen Weg wird jeder zurükgelegt haben?

Arithmetisch. Da der Dieb acht Tage vor dem Häscher weggegangen ist, und täglich sieben Meilen zurükgelegt hat; so ist er um sechs und fünfzig Meilen voraus. Weil nun der Häscher jeden Tag neun Meilen macht, indeßen der Dieb nur sieben zurüklegt; so nähern sie sich einander täglich um zwey Meilen. Die Anzahl der Tagreisen des Häschers muß daher so beschaffen seyn, daß zwey Meilen so oft wiederholt, als jene Anzahl besagt, sechs und fünfzig Meilen ausmachen. Diese Anzahl von Tagen ist also die Hälfte von sechs und fünfzig, nämlich acht und zwanzig.

Tagreisen des Häschers .... 28. Weg des Häschers .... $28 \times 9 = 252$.
. . . . Diebs .... 36. . . . . Diebs .... $36 \times 7 = 252$.

Algebraisch. Bey. Tagreisen des Häschers x
. . . . Diebs ..... $x + 8$
Weg des Häschers ..... $9x$
. . . Diebs ..... $7x + 56$.

Bed. $9x = 7x + 56$.

Red. $2x = 56$ (indem man $7x$ auf beyden Seiten abzieht)
$1x = 28$ (indem man jede Seite durch 2 dividirt)

Aufl. $1x = 28$ Tagreisen des Häschers
$x + 8 = 36$ Tagreisen des Diebs
$9x = 252$ Weg des Häschers
$7x + 56 = 252$ Weg des Diebs.

Probe. $252 = 252$.

Anmerkung. Diese Aufgabe ist sehr wenig von den §§ 2 und 3 entwickelten verschieden. Nämlich die Geschwindigkeit des Diebs ist $\frac{7}{9}$ der Geschwindigkeit des Häschers; der in gleicher Zeit von dem Dieb zurükgelegte Weg ist $\frac{7}{9}$ des Wegs des Häschers; und der Unterschied dieser Wege beträgt $\frac{2}{9}$ von dem des leztern. Da aber der Dieb 56 Meilen voraus ist, so muß der Unterschied der von dem Häscher und dem Dieb während der Tagreisen des erstern zurükgelegten Wege 56 Meilen machen. Folglich sind $\frac{2}{9}$ des Wegs des Häschers 56, $\frac{1}{9}$ dieses Wegs ist 28 Meilen, und der ganze Weg des Häschers ist $9 \times 28 = 252$ Meilen.

Andere Beyspiele. Es kauft jemand einige Ellen von einem Zeug zu fünfzehn Bazen die Elle; und acht Ellen mehr von einem Zeug zu 11 Bazen die Elle. Für beyde bezahlt er gleich viel. Wieviel hat er Ellen von jeder Art gekauft?

Zwey Personen gehen zu gleicher Zeit aus, und kommen einander entgegen. Die eine macht täglich acht, die andere fünf Meilen. Da sie zusammen kommen, hat die erste 24 Meilen mehr, als die andere gemacht.

Von einer gewiesen Anzahl Arbeiter, jeder zu 15 Kreuzer Lohn, und von einer gleichen Anzahl Arbeiter, jeder zu 12 Kreuzer Lohn, haben die erste zusammen 27 Kreuzer mehr erhalten als lezte.

Ein Dieb entflieht, und macht drey Meilen in vier Stunden. Nach vier und zwanzig Stunden sezt ihm ein Häscher nach, welcher vier Meilen in drey Stunden macht. In wieviel Stunden wird dieser den Dieb einholen?

Der Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr stehen um zwölf Uhr gerade über einander. Wann werden sie wieder auf einerley Punkt weisen?

Zwey Schiffe segeln gegen einander. Das eine macht 5 Meilen in 4 Stunden, das andere 4 Meilen in 5 Stunden. Da sie zusammen kommen, hat das erste 36 Meilen

mehr zurükgelegt, als das andere. Wie groß war ihre anfängliche Entfernung; und welche Wege haben sie zurükgelegt?

Es kauft jemand einige Ellen von einem Zeug, wovon er 5 für 3 Thaler bekommt; und eine gleiche Anzahl Ellen von einem andern Zeug, wovon 7 Ellen 4 Thaler kosten. Für die erste Ellen bezahlt er 8 Thaler mehr, als für lezte. Wieviel sind es Ellen?

Zwey Personen A und B sind in Gesellschaft getretten, die erste hat 10000, die andere 12000 Gulden eingelegt. Der Antheil des Gewinns der zweyten beträgt 800 Gulden mehr als der der ersten. Wie groß ist der Gewinn jeder?

§. 7.

Ueberdenkt man die in den vorhergehenden §§ entwikkelte Aufgaben, um sie unter einem allgemeinen Gesichtspunkt zu vereinigen; so findet man, daß sie sich auf folgende zwey zurükführen lassen:

Eine Zahl finden, deren Producte durch zwey gegebene Zahlen eine gegebene Summe machen, oder um eine gegebene Zahl von einander unterschieden sind?

Zum Beyspiel: Wenn man die Entfernung zweyer Reisenden, die einander entgegen kommen, und den Weg, den sie in gleicher Zeit z. E. in einem Tag machen, kennt; und nun den Ort, wo sie zusammen kommen, zu wissen verlangt; so sucht man die Anzahl Tage, welche, wenn man jeden der von ihnen täglich zurükgelegten Wege damit multiplicirt, zur Summe der Producte den Weg gibt, der sie trennte. Gehen diese zwey Reisende nach einerley Richtung; so ist der Unterschied jener Producte ihrer anfänglichen Entfernung von einander gleich.

Wie diese Aufgaben in Worten allgemein ausgedrükt worden sind, ohne weder die als Glieder der Multiplication, oder als Factoren zu nehmende gegebene Zahlen, noch

noch die gegebene Summe oder Differenz bestimmt anzugeben: so ist man auch veranlaßt, sowohl diese Factoren, als die Summe oder Differenz ihrer Producte auf eine allgemeine Art zu bezeichnen.

Man bezeichne die gegebene Zahlen, womit die gesuchte multiplicirt werden soll, allgemein durch m und n; und s sey die gegebene Summe ihrer Producte durch die nämliche gesuchte Zahl:

Ben. Gesuchte Zahl x
Product durch m . . . . mx
. . . . . . n . . . . nx
Summe der Producte . . . . mx+nx.

Bed. $mx+nx=s$.

Die Summe der Producte mx und nx, das heißt, die Summe der Producte von m und n durch x, ist gleich dem Product der Summe von m und n durch x; nämlich $mx+nx=(m+n)\times x$, statt dessen man auch schlechtweg schreibt $(m+n)x$. (Die Parenthese, worein die Summe m+n eingeschloßen ist, zeigt an, daß diese Summe als eine einzige Größe betrachtet, mit dem außerhalb der Parenthese stehenden Glied x multiplicirt ist). Man hat also

Red. $x(m+n)=s$.

Aufl. $x=\frac{s}{m+n}$ (indem man auf jeder Seite durch m+n, womit x multiplicirt war, dividirt). Einen Bruch durch eine gegebene Zahl zu multipliciren, muß man den Zähler desselben durch diese Zahl multipliciren, und den Nenner unverändert lassen. Man hat also

$$mx=\frac{ms}{m+n}$$

$$nx=\frac{ns}{m+n}$$

$$mx+nx=\frac{ms}{m+n}+\frac{ns}{m+n}=\frac{ms+ns}{m+n}=\frac{(m+n)s}{m+n}=s.$$

Die aus der Gleichung $mx+nx=s$ gefolgerte Gleichung $x=\frac{s}{m+n}$ lehrt, daß, wenn die Summe der Producte zweyer gegebenen Zahlen durch eine gesuchte Zahl einer gegebenen Summe gleich ist, die gesuchte Zahl dieser gegebenen Summe, durch die Summe der ersten zwey gegebenen Zahlen dividirt, gleich sey.

Beyspiel. Von einer gewißen Anzahl Arbeiter werden jedem 15 Kreuzer; und von Einer gleichen Anzahl anderer Arbeiter, jedem 12 Kreuzer bezahlt. Im Ganzen bezahlt man 432 Kreuzer. Wieviel waren es Arbeiter von jedem Preis? Hier ist.

$$m=15$$
$$n=12$$
$$s=432$$

Anzahl der Arbeiter $x=\frac{s}{m+n}=\frac{432}{15+12}=\frac{432}{27}=16.$

In den Ausdrücken mx, nx, nennt man die Zahlen m und n, insofern man sie betrachtet, als angebend, wie vielmal die Größe x genommen werde, Coefficienten dieser Größe; und die Gleichung $mx+nx=x(m+n)$ besagt: die Summe der Producte einer Größe durch irgend zwey gegebene Coefficienten, sey dem Product dieser Größe durch die Summe dieser Coefficienten gleich.

Hätte man statt der Gleichung . . $mx+nx=s$
die Gleichung . . . . $lx+mx+nx=s$
so bekäme man ebenso $x(l+m+n)=s$; und $x=\frac{s}{l+m+n}$.
Ebenso, wenn . . . . $lx+mx+nx+px=s$,
so erhält man . $x(l+m+n+p)=s$; und $x=\frac{s}{l+m+n+p}$.
Dieses gilt von jeder Anzahl gegebener Coefficienten. Nämlich die Summe der Producte irgend einer Größe, durch gegebene Coefficienten, ist dem Product dieser Größe durch die Summe dieser Coefficienten gleich. Und wenn die Summe der Producte einer gesuchten Größe durch gegebene Coefficienten ihrer Größe nach bekannt ist, so ist die gesuchte Größe dieser gegebenen Summe, durch die Summe der Coefficienten dividirt, gleich.

Beyspiel. Man stellt eine gewiße Anzahl verschiedener Arbeiter an, Männer, Weiber, Knaben und Mädchen, von jeder Classe gleichviel. Der Lohn eines Mannes ist 24; eines Weibs 21; eines Knaben 18; eines Mädchens 12 Kreuzer. Im Ganzen bezahlt man 675 Kreuzer. Wie viel Arbeiter sind es?

Vier Arbeitern, worunter einer von jeder Classe, bezahlt man soviel Kreuzer, als die Summe $24+21+18+12 = 75$ angiebt. Man findet also die Anzahl Arbeiter von jeder Classe, indem man 675 durch 75 dividirt: und der Quotient 9 giebt die gesuchte Anzahl Arbeiter von jeder Classe an.

Ebenso ist der Unterschied der Producte einer Größe durch zwey gegebene Coefficienten dem Product dieser Größe durch den Unterschied dieser Coefficienten gleich. Und wenn der Unterschied der Producte einer gesuchten Größe durch zwey gegebene Coefficienten der Größe nach gegeben ist; so findet man die gesuchte Größe, wenn man diesen gegebenen Unterschied durch die Differenz der gegebenen Coefficienten dividirt. Hat man nämlich die Gleichung $mx - nx = d$ oder $x(m-n) = d$, so erhält man $x = \frac{d}{m-n}$.

Anmerkung. Ist d der Größe nach gegeben: so kann die Gleichung $mx - nx = d$ nicht statt haben, wenn $m = n$; es wäre nämlich ungereimt, zwey ungleiche gleichvielfache der nämlichen Größe zu verlangen. Wenn also die Größe d einen Werth hat, und die Größen m und n gleich sind, oder keine Differenz haben, so zeigt der Ausdruk $x = \frac{d}{0}$ an, die Beantwortung der vorgelegten Frage seye unmöglich. Da aber für $m = n$ die Producte mx und nx, oder mx und mx nicht unterschieden sind, was auch die Größe x für einen Werth haben mag; also $d = 0$ ist: so zeigt der Ausdruk $x = \frac{0}{0}$, welcher aus $m = n$, und $d = 0$ entspringt, die Unbestimmtheit des Werths von x an, oder daß x jeden beliebigen Werth haben kann.

Ich will diese Anmerkung durch ein Beyspiel erläutern.

Wenn zwey anfänglich um einen gewißen Abstand von einander entfernte Personen eine der andern nachgehen, so muß, wenn sie zusammen kommen sollen, die, welche der andern nachgehet, schneller gehen, als die vorangehende. Gehen beyde gleich geschwind: so bleibt ihr Abstand immer so groß, als er von Anfang war; und die Frage: wann sie zusammen treffen? wäre widersinnig. Verschwindet aber dieser Abstand; und sind auch ihre Geschwindigkeiten gleich: so sind die zwey Personen in einem beständigen Zustand des Zusammentreffens.

Unerachtet in der Gleichung $mx - nx = d$ vorausgesezt wird, daß m größer als n seye; und die Formel oder der allgemeine Ausdruk $x = \frac{d}{m-n}$ aus dieser Voraussezung ist hergeleitet worden: so hat man doch diesen Ausdruk nicht nur auf den Fall, wenn $m = n$, dessen Unmöglichkeit eben gezeigt worden ist; sondern auch noch auf den Fall, wenn n größer als m ist, ausdehnen wollen, in welchem dem Nenner $m - n$ des Bruchs $\frac{d}{m-n}$ das Zeichen der Subtraction voran steht.

Die Erklärung dieses lezten Falls zu erleichtern, nehme ich das Beyspiel der zwey Reisenden wieder vor. Gehen sie nach einerley Richtung: so kann man von einem künftigen Zusammentreffen derselben, nur unter der Voraussezung sprechen, wenn der nachfolgende geschwinder gehet, als der vorausgehende. Und da ihr Zusammentreffen unmöglich ist, wenn sie gleich geschwind gehen: so ist es noch vielmehr unmöglich, wenn der hinten nachgehende langsamer geht, als der vorausgehende; indem alsdann ihr Abstand von einander immer wächset, und desto größer wird, je länger sie gehen. Ob nun aber gleich es wiedersinnig ist, von ihrem künftigen Zusammentreffen zu sprechen: so kann man doch von ihrem vorherigen Beysammenseyn reden, und nach der Stelle fragen, von der sie zu gleicher Zeit ausge-

gangen seyn könnten, wenn man ihren Abstand von einander in einem gegebenen Augenblik kennt. Oder es ist nicht ungereimt, nach der Stelle zu fragen, wo diese zwey Reisende zusammentreffen würden, wenn beyde umkehrten, und die der bisherigen entgegengesezte Richtung nähmen, so daß nun der vorher Nachfolgende voraniege, und umgekehrt. Soll also die Anwendung der Formel auf den Fall $n > m$ einen Sinn geben: so muß sie den Gegensaz andeuten zwischen der Richtung, wornach sich die zwey Reisende wirklich bewegen, und zwischen derjenigen, wornach sie sich bewegen müssen, wenn von einem Zusammentreffen derselben soll die Rede seyn können.

Wird in der auf die Voraussezung, daß m grösser als n sey, gegründeten Gleichung $mx - nx = d$, die man auf den Fall, wo n grösser als m, anwenden will, auf beyden Seiten nx addirt, und mx abgezogen: so bekommt man $nx - mx + d = o$, oder $nx - mx = -d$; und

$$x = -\frac{d}{n-m}$$

$$mx = -\frac{md}{n-m}$$

$$nx = -\frac{nd}{n-m}.$$

Wendet man diese Formeln auf die Aufgabe von den zwey Reisenden an, wobey m und n ihre Geschwindigkeiten, und x die gesuchte Zeit bedeutet: so zeigt der Ausdruk $x = -\frac{d}{n-m}$ den Gegensaz zwischen der angenommenen und wahren Zeit an, und lehrt, daß diese Zeit von dem Augenblik an, in welchem man die Stellung der beyden Reisenden betrachtet, rükwärts, nicht vorwärts zu nehmen ist. Und die Ausdrücke $mx = -\frac{md}{n-m}$, $nx = -\frac{nd}{n-m}$ zeigen den Gegensaz an zwischen der Richtung, nach welcher sie sich bewegen, und zwischen derjenigen, nach welcher sie gehen müssen, damit ein Zusammentreffen statt findet.

Die vorgelegte Aufgabe kann und muß also für den Fall $n > m$ folgendermaßen ausgedrükt werden: Zwey miteinander von einerley Ort ausgegangene Personen gehen nach der nämlichen Richtung mit ungleichen Geschwindigkeiten; man weiß, wie weit sie am Ende einer gewißen Zeit von einander entfernt sind: man verlangt ihre Entfernungen von dem Ort zu wißen, von welchem sie ausgegangen sind.

Wird die Rechnung über die Fälle hinaus, worauf die Formeln anwendbar sind, ausgedehnt: so zeigt sie uns die Gewalt, die wir ihr anthun, und den in der Faßung der Frage begangenen Fehler. Die sich ergebende Aenderung des Zeichens der Ausdrücke zeigt den Gegensaz an, der zwischen den vermutheten Antworten, und zwischen denjenigen statt hat, welche allein einen vernünftigen Sinn geben.

Da dieser Gegensaz sowohl in den abstracten Rechnungen, als in der angewandten Mathematik häufig vorkommt: so sind die Mathematiker veranlaßt worden, denselben auf eine bequeme Art zu benennen. Er ist immer durch die Zeichen der Addition und der Subtraction angedeutet. Das von dem Haben = und Schuldigseyn eines Kaufmanns hergenommene Beyspiel ist sehr geschikt, die Benennung der additiven und subtractiven Größen zu erläutern: indem man, um seinen Vermögenszustand zu bestimmen, seine Schulden von dem, was er besizt, abziehen muß; und er wirklich Etwas, oder Nichts, oder Schulden hat, je nachdem das, was er besizt, mehr ist, als was er schuldig ist, oder diesem gleich, oder weniger. Von Zeiten vor und nach einer gegebenen Epoche wird der Gegensaz durch die Worte vergangen und zukünftig ausgedrükt. Bewegen sich zwey Körper nach entgegengesezten Richtungen: so nennt man die Bewegung desjenigen, den man zum Hauptaugenmerk nimmt, direct oder vorwärts gehend, und die des andern rükgängig. Dergleichen Gegensaz zu bezeichnen, nennt man in der Mathematik nach einem allgemein eingeführten Gebrauch diejenige Größen positiv, oder bejaht, welche die Beschaffenheit haben, die

man anfänglich den Grössen, womit man sich beschäftiget, beygelegt hat; die ihnen entgegengesezte aber heißen negative oder verneinte. Es werden, wenn man das, was eine Person hat, als Hauptgegenstand ansieht, ihre Schulden ein negatives Vermögen genannt: und wenn sie 1000 mehr schuldig ist, als sie besizt, so bedient man sich, statt zu sagen, sie habe 1000 Gulden Schulden, des widersprechenden Ausdruks, sie besize minus tausend Gulden, oder sie habe ein negatives Vermögen von tausend Gulden. Beziehet man aufwärts und niederwärts gehende Bewegungen auf einander; so nennt man das Herabsteigen ein negatives Aufsteigen. Eben so heißt das Vergangene ein negatives Zukünftiges: und die rükgängige Bewegung von Morgen gegen Abend heißt negativ, in Beziehung auf die als positiv betrachtete directe Bewegung von Abend gegen Morgen.

Da die Schulden das Vermögen einer Person vermindern; und die Schritte, welche ein Reisender nach der entgegengesezten Richtung von derjenigen macht, nach welcher vorwärts zu kommen sein Hauptzwek ist, von dem Weg, den er nach dieser Richtung gemacht hat, abgezogen werden müssen, um sein wirkliches Vorrücken zu bestimmen: so hat man sich hiebey noch des uneigentlichen Ausdruks bedient, die negativ benannte Grössen seyen kleiner, als Nichts. Dergleichen Ausdrücke könnten auf Begründung einer Vergleichung zwischen den positiv und negativ genannten Grössen abzuzwecken scheinen, vermöge welcher man fragen könnte: wie vielmal tausend Thaler, die man besizt, tausend Thaler, die man schuldig ist, enthalten; oder wie vielmal man tausend Thaler Schulden nehmen müße, um tausend Thaler Vermögen heraus zu bringen. Dergleichen, den ersten Begriffen von Multiplication und Division widersprechende Fragen scheinen mir keiner Beantwortung fähig zu seyn. Die Multiplication ist eine wiederholte Addition gleicher Grössen. Man mag aber eine Schuld, so oft man will, zu sich selbst addiren, so erhält man doch nie ein positives Vermögen. Bey der Division sind entweder Dividendus und Divisor Grössen von einerley Art; und alsdenn ist der Quo-

tient eine abstracte (allezeit positive) Zahl, nach deren Angabe man den Divisor zu wiederholen hat, um den Dividendus herauszubringen. Oder Dividendus und Quotient sind Größen von einerley Art; und der Divisor ist eine abstracte Zahl, welche angiebt, in wieviel gleiche Theile man den Dividendus theile: wobey ich mir keinen Begriff von dem Ausdruk machen kann, den Dividendus in minus eine gegebene Anzahl gleicher Theile theilen.

Ich bin daher der Meinung: man solle die den Größen, womit man sich beschäftiget, vorgesezte Zeichen der Addition und der Subtraction, nur als Bezeichnung der damit vorzunehmenden Operationen, und nicht als Unterscheidung zweyer besonderer Classen von Größen ansehen. Und wenn ich mich in der Folge der eingeführten Ausdrücke bediene, und von positiven und negativen Größen rede; so geschieht es, um mich nach einem angenommenen Sprachgebrauch zu richten, den ich mir nicht herausnehmen will, abzuändern. Diese Ausdrücke werden nach ihrer wahren Bedeutung zu verstehen seyn, nämlich als Anzeige einer vorzunehmenden Addition oder Subtraction.

Die Ausdrücke $\frac{-a}{b}$ und $\frac{a}{-b}$ sind demnach beyde auf den Ausdruk $-\frac{a}{b}$ zurükzubringen, welcher die Subtraction des Quotienten $\frac{a}{b}$ anzeigt. Insbesondere kann $\frac{-a}{-b}$ nicht der Ausdruk einer Division seyn: und er wird nur dadurch verständlich, daß man auf seinen Ursprung zurükgeht; wie ich bey dem Beyspiel von zwey Reisenden gethan habe, von denen der nachfolgende langsamer geht, als der vorangehende.

Eine Größe allein, vor welcher kein Zeichen steht, ist anzusehen, als habe sie das Zeichen der Addition. Größen, welche das Zeichen der Addition haben, werden addirt, indem man sie hinter einander mit diesem Zeichen hinschreibt. So ist $a+b$ die Summe von a und b.

Soll man von einer Größe, vor welcher das AdditionsZeichen steht, eine andere, welche das nämliche Zei-

chen vor sich hat, abziehen: so schreibt man auch die zweyte hinter die erste, und zeigt die zu verrichtende Subtraction durch das ihr zukommende Zeichen an. So bezeichnet $a-b$ den Rest, welchen man erhält, wenn man b von a abzieht. In einem uneigentlichen Verstand sagt man auch: man müsse zu der Größe a die Größe $-b$ addiren.

Man soll nun von der Größe a die Größe $b-c$ abziehen. Hätte man b von a abzuziehen, so bliebe die Größe $a-b$ übrig. Allein statt b abzuziehen, sollte man diese um c verminderte Größe subtrahiren. Zieht man also die ganze Größe b ab: so subtrahirt man um c zuviel, und der Rest $a-b$ ist um die Größe c zu klein; folglich muß der Rest $a-b+c$ seyn. Um daher eine aus zwey oder mehreren, theils mit dem Zeichen der Addition, theils mit dem der Subtraction bezeichneten Gliedern bestehende Größe abzuziehen, muß man die Zeichen der Glieder des Subtrahendus, $+$ in $-$, und $-$ in $+$ verändern, und sie mit den so umgeänderten Zeichen an die Glieder des Minuendus anhängen: nämlich $a-(b-c)=a-b+c$.

Wenn die Größen, mit welchen man diese Operationen vornimmt, aus ähnlichen Gliedern mit verschiedenen Coefficienten bestehen: so vereinigt man diese ähnliche Glieder, indem man an ihren Coefficienten die angezeigte Rechnungsarten vollzieht.

Beyspiele. $2a+3a=5a \quad 2a+3b-(a+2b)=a+b.$
$3a-2a=1a \quad 2a+3b-(a-b)=a+4b.$

§. 8.

Aufgabe. Drey Personen A, B, C haben zusammen 144 Gulden. A und B zusammen haben zweymal so viel als C; und A und C zusammen haben dreymal so viel als B. Wieviel hat jede?

Arithmetisch. Weil die Summe des Vermögens von A und B das doppelte von dem ist, was C hat: so ist das Vermögen von C ein Drittel der Summe des Vermögens aller drey Personen, nämlich ein Drittel von 144; also 48 Gulden. Ebenso weil die Summe des Vermögens von A und C das dreyfache von dem ist, was B hat, ist die Summe des Vermögens der drey Personen das vierfache des Vermögens von B; dieses ist also ein Viertel der Summe des Vermögens der drey Personen, nämlich ein Viertel von 144, das ist 36 Gulden. Die Summe des Vermögens von B und C ist $48+36=84$. A hat mithin $144-84=60$.

Algebraisch.

Bey. Vermögen von C x
Summe des Vermögens von A und B . $2x$
Summe dessen, was alle drey haben . . $3x$

Bed. $3x = 144$

Red. und Aufl. $1x=\frac{144}{3}=48$ Vermögen von C
$2x=96$ Summe des Vermögens von A und B.

Ebenso ist, das Vermögen von B . . . y gesezt,
die Summe des Vermögens von A und C . . $3y$
und die Summe dessen, was alle drey haben . $4y$

Bed. $4y = 144$

Red. und Aufl. $y=\frac{144}{4}=36$ Vermögen von B
$3y=108$ Summe des Vermögens von A und C.
Da A und B mit einander 96 haben, und B 36 hat; so hat A 60.

Anmerkung. Diese Aufgabe zerfällt also in zwey, welche den in §§ 2 und 3 ähnlich sind.

Allgemein. Die Summe des Vermögens der drey Personen A, B, C, ist s; A und B zusammen haben das mfache dessen, was C hat; A und C zusammen haben das nfache dessen, was B hat.

Durch Räsonnement. Die Summe des Vermögens der drey Personen ist das $(m+1)$fache des Vermögens von C, und das $(n+1)$ fache des Vermögens von B. Folglich ist das Vermögen von C .... $\frac{s}{m+1}$, und das Vermögen von B ist $\frac{s}{n+1}$. Das Vermögen von A ist also $s-(\frac{s}{m+1}+\frac{s}{n+1})=s(1-\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n+1}=$ $s\left(\frac{(mn+m+n+1)-(n+1)-(m+1)}{(m+1)(n+1)}\right)=s\times\frac{mn-1}{(m+1)(n+1)}$.

Anmerkung. Wenn mn größer ist, als 1; so ist die Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Fassung aufgelöst.

Ist aber $mn=1$, folglich $n=\frac{1}{m}$: so ist das Vermögen von A Null. Die Summe des Vermögens von B und C ist s. Das Vermögen von B ist das mfache des Vermögens von C; also das Vermögen von C, $\frac{1}{m}$tel des Vermögens von B.

Ist mn kleiner als 1: so verwandelt sich das Vermögen von A in Schulden. Die Aufgabe läßt sich aber für diesen Fall auf eine andere zurükführen, wobey das, was als Vermögen A gefunden wird, wirkliches Vermögen vorstellt; und zwar auf folgende Art: der Ueberschuß der Summe des Vermögens von B und C über das Vermögen von A ist s. Der Ueberschuß des Vermögens von B über das von A ist das mfache dessen, was C hat; und der Ueberschuß des Vermögens von C über das von A ist das nfache dessen, was B hat. So bleiben für das Vermögen von C und von B die vorigen Ausdrücke; und das Vermögen von A ist $s\times\frac{1-mn}{(m+1)(n+1)}$.

Andere Beyspiele. Das Vermögen von 4 Personen A, B, C, D ist folgendermaßen beschaffen:

Die Summe ihres gesammten Vermögens ist s.

Die Summe des Verm. v.	A, B, C,	ist mmal das Verm. v.	D
. . . .	A, B, D = n	. . . . .	C
. . . .	A, C, D = p	. . . . .	B.

Das Vermögen von 5 Personen, A, B, C, D, E ist folgendermaßen beschaffen:

Die Summe ihres gesammten Vermögens ist s.

Die Summe d. Verm. v.	A, B, C, D,	ist mmal d. Verm. v.	E
. . . .	A, B, C, E = n	. . . . .	D
. . . .	A, B, D, E = p	. . . . .	C
. . . .	A, C, D, E = q	. . . . .	B.

Ebenso für 6, 7 . . . . Personen.

Alle diese Aufgaben lassen sich in eben so viel besondere Aufgaben von der Art der in den §§ 2 und 3 vorkommenden zerlegen, als die um 1 verminderte Anzahl der gesuchten Vermögensantheile angiebt.

§. 9.

Aufgabe. Bey der Abstimmung einer Versammlung von 100 Personen über zwey Mitbewerber um ein Amt hat der eine A 12 Stimmen mehr bekommen, als der andere B. Wieviel Stimmen hat jeder von ihnen bekommen?

Arithmetisch. Wären gleichviel Stimmen für jeden gefallen; so hätte jeder 50 bekommen. Für jede Stimme über 50, die auf A fallen, bekommt B eine weniger als 50 (damit die Summe der Stimmen immer 100 bleibe). Eine Stimme Unterschied zwischen 50 und der Zahl der Stimmen, die einer der beyden Candidaten erhält, macht also einen Unterschied von zwey Stimmen zwischen der Stimmenanzahl, welche die zwey Mitbewerber erhielten. Folglich ist überhaupt der Unterschied der für sie fallenden Stimmen das Doppelte des Unterschieds zwischen 50 und der Stimmenanzahl eines jeden: und dieser lezte Unterschied ist die Hälfte des ersten. Nun

ist der erste Unterschied 12; folglich der zweyte 6. A hat also 6 Stimmen mehr als 50, nämlich 56; und B 6 Stimmen weniger als 50, d. i. 44 bekommen.

Anders. Wäre die Anzahl der Wählenden nur 12 gewesen; so hätte A alle Stimmen bekommen. Es sind aber der Wählenden 88 mehr. Damit also A nun 12 Stimmen mehr als B erhalte: so müßen diese 88 Wählende ihre Stimmen unter die zwey Candidaten gleich vertheilen. Folglich bekommt B die Hälfte von 88 Stimmen, d. i. 44; und A, welcher 12 Stimmen mehr bekommt, erhält deren 56.

Algebraisch.

Ben. Stimmen für B x
. . . . . A . . . . . $x+12$
Summe der Stimmen . . . $2x+12$.

Bed. $2x+12=100$.

Red. $2x = 88$, indem man auf beyden Seiten 12 abzieht.
$1x = 44$, indem man auf jeder Seite durch 2 divid.

Aufl. x 44 Stimmen für B
$x+12=$ 56 Stimmen für A

$2x+12=100$ Summe der Stimmen.

Probe. $100 = 100$.

Andere Beyspiele.

A und B haben miteinander 144, 148, 157 . . . Gulden.
A hat . . . . 36, 42, 49 . . mehr als B.

Allgemein. Man verlangt zwey Größen, deren Summe s, und deren Unterschied d gegeben sind.

Auch auf diese allgemeine Aufgabe läßt sich das Räsonnement anwenden.

Wäre nämlich die gegebene Summe d: so würde,

der zweyten Bedingung zufolge, die kleinere Größe Null, und die größere d seyn. Ist aber s größer als d: so bleibt s—d unter die zwey Größen gleich zu theilen übrig, damit die größere die kleinere um d übertreffe. Die kleinere Größe ist also $\frac{s-d}{2}$; und die größere $\frac{s-d}{2}+d=\frac{s-d}{2}+\frac{2d}{2}$ $=\frac{s+d}{2}$.

Algebr. Ben. Kleinere Größe x
größere . . . . . . $x+d$
Summe . . . . . . $2x+d$.

Bed. $2x+d=s$.

Red. $2x=s-d$ (indem man auf beyden Seiten d abzieht.)
$x=\frac{s-d}{2}$ (indem man auf beyden Seiten durch 2 divid.)

Aufl. $x=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d$, kleinere Größe.
$x+d=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d+\frac{2}{2}d=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}d$, größere Größe.
$2x+d=s$, gegebene Summe.

Probe. $s=s$.

1. Anmerk. Die Formeln $x=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d$, $x+d=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}d$ lehren: daß von zwey Größen, deren Summe und Unterschied man kennt, die kleinere dem Ueberschuß der halben Summe über den halben Unterschied; und die größere der halben Summe und dem halben Unterschied zusammen gleich ist.

Beyspiel. Es sey $s=100$; $\frac{1}{2}s=50$; $\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d=44$.
$d=12$; $\frac{1}{2}d=6$; $\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}d=56$.

2. Anmerk. Soll die Aufgabe in dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage möglich seyn: so darf die gegebene Summe nicht kleiner seyn, als die gegebene Differenz. Sind sie einander gleich, so wird die kleinere Größe $\frac{s-s}{2}$ oder Null. Ist aber die gegebene Differenz größer als die Summe; so verändert die kleinere Größe ihr Zeichen,

und wird subtractiv. Betrachtet man beyde Größen als additiv: so wird aus Summe und Differenz nunmehr Differenz und Summe.

So, wenn A und B zusammen 100 Gulden haben, und A 112 Gulden mehr als B haben soll, ist die Aufgabe nur in sofern möglich, als das Vermögen von B Schulden sind: nämlich B ist 6 Gulden schuldig, und A besizt wirklich 106 Gulden. Woraus folgt, daß beyde mit einander 100 Gulden haben; und daß A die 106 Gulden, welche er wirklich hat, und überdieß noch die 6 Gulden, welche B schuldig ist, mehr besizt, als B. Will man diese Aufgabe in eine andere verwandeln, worinn der Ausdruk: Vermögen, im eigentlichen Verstand genommen wird; so muß die Summe des Vermögens, als 112, und der Unterschied als 100 betrachtet werden.

§. 10.

Aufgabe. Das Vermögen von 3 Personen A, B, C, ist folgendermaßen beschaffen:

Die Summe des Vermögens von A und B ist 100 Gulden.
. . . . A — C — 120 . .
. . . . B — C — 144 . .

Wieviel hat jede?

Durch Räsonnement. Diese Aufgabe läßt sich folgendermaßen auf die vorhergehende zurükführen. Addirt man zu dem Vermögen von A einmal das Vermögen von B, und das andere mal das Vermögen von C: so erhält man das zweyte mal 20 Gulden mehr, als das erste mal. Folglich übertrifft das Vermögen von C das von B um 20 Gulden. Die Summe des Vermögens von B und C ist aber 144 Gulden. Folglich sind nach dem vorhergehenden § das Vermögen von B und C 62 und 82 Gulden; und das Vermögen von A beträgt 38 Gulden.

Wirklich sind

$$38 + 62 \qquad = 100$$
$$38 + \quad 82 = 120$$
$$62 + 82 = 144.$$

Anders. Da die Summen des Vermögens von A und des Vermögens jeder der beyden B und C; desgleichen die Summen des Vermögens von B und des Vermögens jeder der beyden A und C, und endlich die Summen des Vermögens von C und des Vermögens jeder der beyden A und B angegeben sind: so ist die Summe der drey angegebenen Vermögen das doppelte der Summe ihrer einzelnen gesuchten Vermögen. Diese ist also die Hälfte von 364, das ist 182 Gulden. Und was jede hat, ist der Ueberschuß von 182

für A, B, C
über 144, 120, 100,
mithin 38, 62, 82.

Algebraisch. Ben. Vermögen von A x
. . . . B . . . 100 - x
. . . . C . . . 120 - x
Summe des Vermögens von B und C . . . 220 - 2x.

Bed. $220 - 2x = 144.$

Red. $220 = 144 + 2x$ (indem man beyderseits 2x addirt.)
$76 = \ 2x$ (indem man beyderseits 144 subtrahirt.)
$38 = \ 1x$ (indem man beyderseits durch 2 dividirt.)

Aufl. $x = \ 38$ Vermögen von A.
$100 - x = \ 62$ Vermögen von B
$120 - x = \ 82$ Vermögen von C.
$220 - 2x = 144$ Summe des Vermögens von B und C.

Probe. $144 = 144.$

Anders. Ben. Summe des Vermögens der drey Personen x
Vermögen von A . . . x—144
. . . . . B . . . x—120
. . . . . C . . . x—100
Summe des gesammten Vermögens . . 3x—364.

Bed.

Bed. $3x - 364 = x.$

Red. $3x = x + 364$ (indem man beyderseits 364 addirt)
$2x = 364$ (indem man beyderseits x abzieht)
$1x = 182$ (indem man beyderseits durch 2 dividirt)

Aufl. $x = 182$ Summe des gesammten Vermögens
$x - 144 = 38$ Vermögen von A
$x - 120 = 62$ Vermögen von B
$x - 100 = 82$ Vermögen von C
$3x - 364 = 182$ Summe des gesammten Vermögens.

Probe. $182 = 182.$

Allgemein. Drey Größen finden, deren Summen paarweise genommen bekannt sind.

A, B, C, bedeuten, was jede der drey Personen hat.

Es sey
$$\begin{aligned} A+B &= c \\ A+C &= b \\ B+C &= a. \end{aligned}$$

Man will wissen, was jede hat?

Da $2A + 2B + 2C = a + b + c$,

so ist $A + B + C = \frac{a+b+c}{2}$

$$C = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2} = \frac{a+b-c}{2}$$

$$B = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2b}{2} = \frac{a-b+c}{2}$$

$$A = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2a}{2} = \frac{-a+b+c}{2}$$

Das heißt: die Summe des gesuchten Vermögens der drey Personen ist der halben Summe der gegebenen drey Vermögen gleich; und das Vermögen jeder Person ist die Hälfte des Ueberschußes der zwey Summen der angegebenen Vermögen, wovon das seine ein Theil ist, über die Summe des Vermögens der zwey andern.

Beyspiel. Es sey $a=144$
$b=120$
$c=100$

$$A = \frac{-144+120+100}{2} = 38$$

$$B = \frac{144-120+100}{2} = 62$$

$$C = \frac{144+120-100}{2} = 82.$$

Anmerkung. Damit diese Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage möglich sey, oder damit die drey gesuchte Größen positiv werden; muß die Summe jeder der zwey gegebenen Größen nicht kleiner seyn, als die dritte. Ist eine der angegebenen VermögensSummen größer, als die der zwey andern zusammen: so verändert diejenige gesuchte Größe, welche in jener Summe nicht begriffen ist, ihr Zeichen, und wird subtractiv. Und um die Aufgabe in eine andere zu verwandeln, worinn die drey gesuchte Größen positiv seyn, müssen die zwey andere gegebene Größen die Ueberschüsse jeder der zwey andern gesuchten Größen über die dritte angeben.

a sey z. B. in den vorhergehenden Formeln größer als die Summe $b+c$; folglich A negativ: so verwandle man die Aufgabe in die folgende:
der Ueberschuß des Vermögens von B über das von A ist a,
der Ueberschuß des Vermögens von C über das von A ist b,
und die Summe des Vermögens von B und C ist c.
So hat man;

$$\begin{aligned} -A+B \quad &= c \\ -A \quad +C &= b \\ B+C &= a. \end{aligned}$$

Demnach;

$$-2A+2B+2C = a+b+c$$

$$-A+B+C = \frac{a+b+c}{2}$$

$$C = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}$$

$$B = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a-b+c}{2}$$

$$A = a - \frac{a+b+c}{2} = \frac{a-b-c}{2}.$$

Soll nun diese lezte Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage sich auflösen lassen; so darf a nicht kleiner als b+c seyn.

Die zwey Aufgaben, in deren einer die Summen des Vermögens jeder der zwey Personen B und C, und des Vermögens von A, in der andern der Ueberschuß des Vermögens jeder der zwey Personen B und C über das Vermögen von A gegeben sind, lassen sich also eine auf die andere zurükführen; und die Antworten darauf hängen von der Größe von a in Vergleichung mit der der Summe von b und c ab.

§. 11.

Das nämliche Verfahren ist auch bey einer größern Anzahl gesuchter und gegebener Größen anwendbar, wovon diese die Summen jener, eine jedesmal ausgenommen, angeben.

A, B, C, D bedeuten das Vermögen jeder von vier Personen. d, c, b, a seyen gegebene Größen; und man habe folgende Bedingungen:

$$A+B+C \quad =d$$
$$A+B \quad +D=c$$
$$A \quad +C+D=b$$
$$B+C+D=a.$$

Die Summe der vier gegebenen Grösen ist das dreyfache der Summe der vier gesuchten Größen. Die einfache Summe der vier gesuchten Größen ist also ein Drittel der Summe der vier gegebenen Größen. Man hat demnach

$$A+B+C+D = \frac{a+b+c+d}{3}$$

folglich:

$$D = \frac{a+b+c+d}{3} - d = \frac{a+b+c+d}{3} - \frac{3d}{3}$$
$$= \frac{a+b+c-2d}{3}$$

$$C = \frac{a+b+c+d}{3} - c = \frac{a+b+c+d}{3} - \frac{3c}{3}$$
$$= \frac{a+b-2c+d}{3}$$

$$B = \frac{a+b+c+d}{3} - b = \frac{a+b+c+d}{3} - \frac{3b}{3}$$
$$= \frac{a-2b+c+d}{3}$$

$$A = \frac{a+b+c+d}{3} - a = \frac{a+b+c+d}{3} - \frac{3a}{3}$$
$$= \frac{-2a+b+c+d}{3}.$$

1. Anmerk. Soll die Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage möglich seyn; so darf die Summe von jeden drey gegebenen Größen nicht kleiner seyn, als das Doppelte der übrigen vierten. Im entgegengesezten Fall muß man, um die Auflösung in additiven Größen zu erhalten, Differenzen statt Summen in der Aufgabe setzen.

2. Anmerk. Das bisherige Verfahren ist allgemein für jede Anzahl von Größen, von welchen man, außer einer, die Summen kennt. Ist nämlich n die Zahl der gesuchten Größen: so ist die Summe aller gegebenen Größen des (n — 1)fache der Summe aller gesuchten Größen. Demnach ist die Summe aller gesuchten Größen der (n—1)te Theil der Summe aller gegebenen Größen: und man erhält jede der gesuchten Größen, indem man von diesem Quotienten die gegebene Größe abzieht, worinn diese gesuchte nicht als Theil vorkommt.

§. 12.

Aufgabe. Jemand will eine gewiße Anzahl Ellen Zeug kaufen. Um Zeug zu 12 Gulden die Elle zu kaufen,

hat er 18 Gulden zu wenig. Kauft er aber Zeug zu 9 Gulden die Elle, so behält er 12 Gulden übrig. Wieviel Ellen will er kaufen; und wieviel Geld hat er?

Durch Räsonnement. Weil dem Käufer zu dem ersten Kauf 18 Gulden fehlen, bey dem zweyten aber 12 Gulden übrig bleiben; so hätte er für den ersten Zeug $18+12=30$ Gulden mehr zu bezahlen gehabt, als für den andern. Da nun jede Elle des ersten Zeugs drey Gulden mehr kostet, als jede Elle des zweyten; so würde er für den ersten Zeug so vielmal drey Gulden mehr als für den zweyten bezahlt haben, als es Ellen sind. Drey Gulden so vielmal genommen, als es Ellen sind, machen also 30 Gulden; Ein Gulden so vielmal genommen, als es Ellen sind, macht 10 Gulden: die Anzahl der Ellen ist also 10.

Anzahl der Ellen 10
Preis des erstern Zeugs . . $12 \times 10 = 120$ Gulden
Geld des Käufers . . . $120 - 18 = 102$
Preis des andern Zeugs . . $9 \times 10 = 90$
Geld des Käufers . . . . $90 + 12 = 102$.

Algebraisch.

Bey. Anzahl der Ellen x
Preis des ersten Zeugs . . . $12x$
Geld des Käufers . . . . $12x - 18$
Preis des zweyten Zeugs . . . . $9x$
Geld des Käufers . . . . $9x + 12$

Bed. $12x - 18 = 9x + 12$.

Red. $12x = 9x + 30$ (indem man beyderseits 18 addirt)
$3x = 30$ (indem man beyderseits $9x$ abzieht)
$1x = 10$ (indem man beyderseits durch 3 dividirt)

Auflös. $x = 10$ Anzahl der Ellen.
$12x = 120$ Preis des ersten Zeugs
$12x - 18 = 102$ Geld des Käufers
$9x = 90$ Preis des zweyten Zeugs
$9x + 12 = 102$ Geld des Käufers.

Probe. $102 = 102$.

Andere Beyspiele. Die Preise einer Elle seyen 17 und 13. Der Käufer habe in dem ersten Fall 15 zu wenig; in dem zweyten 21 zu viel.

Die Preise einer Elle seyen 19 und 16. Dem Käufer fehlen im ersten Fall 30; im zweyten 6.

Die Preise einer Elle seyen 18 und 14. Der Käufer behalte beym ersten Kauf 12; beym zweyten 40 Gulden übrig.

Allgemein. Die Preise einer Elle seyen m und n, wobey m größer angenommen wird als n. Zu dem ersten Kauf fehlen r Gulden; und bey dem zweyten bleiben r' Gulden übrig.

Ben.	Anzahl der zu kaufenden Ellen . .	x
	Preis des ersten Zeugs	mx
	Geld des Käufers	$mx-r$
	Preis des andern Zeugs	nx
	Geld des Käufers	$nx+r'$

Bed. $mx-r=nx+r'$.

Red. $mx=nx+r'+r$ (indem man beyderseits r addirt.)

$mx-nx=r'+r$ (indem man beyderseits nx abzieht)

$x=\frac{r'+r}{m-n}$ (indem man beyderseits durch m-n dividirt)

Aufl. $x=\frac{r'+r}{m-n}$ Anzahl der zu kaufenden Ellen.

$mx=\frac{mr'+mr}{m-n}$ Preis des ersten Zeugs

$mx-r=\frac{mr'+mr}{m-n}-\frac{mr-nr}{m-n}=\frac{mr'+nr}{m-n}$ Geld des Käufers

$nx=\frac{nr'+nr}{m-n}$ Preis des andern Zeugs

$nx+r'=\frac{nr'+nr}{m-n}+\frac{mr'-nr'}{m-n}=\frac{mr'+nr}{m-n}$ Geld des Käufers.

Probe. $\frac{mr'+nr}{m-n}=\frac{mr'+nr}{m-n}$.

Anmerkung. In der Aufgabe ist angenommen worden, m sey größer als n; und dieser Voraussezung gemäß ist die Gleichung $mx-r=nx+r'$ in der Reduction behandelt worden.

1. Sezt man $m=n$: so heben sich die gleichen, die unbekannte Größen enthaltenden, Glieder mx und nx auf, und die BedingungsGleichung verwandelt sich in $-r=+r'$: die Aufgabe ist demnach unmöglich, wofern nicht $-r=+r'$, das ist, wofern nicht der bey dem zweyten Kauf (welcher nun von dem ersten nicht verschieden ist) angenommene Geld-Ueberschuß r' sich in einen Geldabgang verwandelt, der dem bey dem ersten Kauf vorausgesezten r gleich ist; oder wofern nicht der bey dem ersten Kauf vorausgesezte Mangel r sich in einen Ueberschuß verwandelt, der dem bey dem zweyten Kauf angenommenen r' gleich ist. Alsdann ist die Aufgabe unbestimmt. Beyde Käufe, welche sich auf zwey verschiedene Preise beziehen sollten, sind nämlich nun auf einen und denselben Preis gestellt: so muß auch in beyden, was der Käufer übrig behält, oder was ihm fehlt, ein und eben dasselbe seyn.

Sezt man aber in der Auflösung $m=n$, so erhält man $x=\frac{r+r'}{o}$; und dieser Ausdruk zeigt die Unmöglichkeit der Aufgabe an; wofern nicht zugleich $r+r'=o$, in welchem Fall die Aufgabe unbestimmt ist.

2. Man seze $m<n$ *); so bekommt in der Auflösung der Werth von $x=\frac{r'+r}{m-n}$ die Gestalt eines Bruchs, dessen Nenner subtractiv ist. Die Gleichung der Bedingung $mx-r=nx+r'$ hätte der Voraussezung, daß $m<n$, gemäs behandelt werden sollen; so hätte man bekommen

*) Wie man die Gleichheit zweyer Größen durch ein besonderes Zeichen angedeutet hat; so fand man es auch schiklich, ihre Ungleichheit zu bezeichnen. Dis geschieht durch die Zeichen $>$ und $<$; wovon das erste gelesen wird: ist größer als; und das zweyte: ist kleiner als. Der Ausdruk $m>n$ heißt also: m ist größer als n; und der Ausdruk $n<m$ wird gelesen: n ist kleiner als m.

$nx - mx = -r - r' = -(r+r')$; und $x = -\frac{r+r'}{n-m}$. Der Ausdruk $\frac{r'+r}{m-n} = \frac{r'+r}{-(n-m)}$ ist nur in sofern verständlich, als er, wenn man auf seinen Ursprung zurükgeht, sich auf den Ausdruk $-\frac{r+r'}{n-m}$ bringen läßt. Dieser Ausdruk $x = -\frac{r+r'}{n-n}$ zeigt an: daß man, statt zu kaufen, so viel Ellen verkaufe, und daß man Geld einnehme, statt auszugeben. Die Aufgabe verwandelt sich also in diese. Wenn jemand, der Schulden hat, eine gewiße Anzahl Ellen Zeug zu m Gulden die Elle verkauft, so bleibt er noch r Gulden schuldig; verkauft er aber eben so viel Ellen Zeug zu n Gulden die Elle, indem n größer ist als m, so hat er r Gulden.

3. Die Formel $x = \frac{r+r'}{m-n}$ dient auch die Aufgaben aufzulösen, wo r und r' ihre Zeichen verändern. Z. B. r bedeute, statt einer fehlenden Summe, auch einen Ueberschuß: so wird $x = \frac{-r+r'}{m-n}$, wenn $m > n$; und $x = \frac{r-r'}{n-m}$, wenn $n > m$. Für $m = n$, ist die Aufgabe unmöglich oder unbestimmt, je nachdem r und r' ungleich oder gleich sind.

Bleibt r eine fehlende Summe, und ist auch r' eine solche: so wird $x = \frac{r-r'}{m-n}$, wenn $m > n$; und $x = \frac{r'-r}{n-m}$, wenn $m < n$. Für $m = n$ ist x unbestimmt, oder unmöglich, je nachdem r und r' gleich oder ungleich sind.

4. Die Formel $x = \frac{r+r'}{m-n}$ läßt sich nicht nur auf den Fall anwenden, wo man gleichviel Ellen von jedem Zeug kauft; sondern auch noch weiter auf den, wenn man Ellen von dem einen Zeug kauft, und eben so viel Ellen von dem andern Zeug verkauft.

Man seze nämlich die Aufgabe: Einer Person fehlen r Gulden, um eine gewiße Anzahl Ellen Zeug zu m Gulden die Elle zu kaufen; wenn sie aber selbst eben so viel Ellen Zeug, zu n Gulden die Elle, verkauft, so hat sie r' Gulden. Das Räsonnement und die algebraische Rechnung

zeigen beyde: daß man, um aus den Formeln für die erste Aufgabe die für die lezte herzuleiten, das Zeichen von n zu verändern habe.

Wirklich würde man beym Räsonnement sagen: Weil ihr zu dem Kauf die Summe r fehlt, da sie hingegen nach dem Verkauf die Summe r' hat; so hat sie nach dem Verkauf $r+r'$ mehr Geld, als nach dem Kauf. Da sie aber für eine gekaufte Elle m bezahlt, für eine verkaufte Elle hingegen n einnimmt; so hat sie, wenn sie, statt eine Elle zu kaufen, eine verkauft, für jede Elle nach dem Verkauf $m+n$ Gulden mehr, als nach dem Kauf. Sie hat also nach dem Verkauf mehr, als nach dem Kauf, soviel mal $m+n$ Gulden, als es Ellen sind. Folglich ist $m+n$, multiplicirt durch die Anzahl der Ellen, gleich $r+r'$; und die Anzahl der Ellen ist $\frac{r+r'}{m+n}$; welche Formel sich von der für die erste Aufgabe nur durch das Zeichen von n unterscheidet.

Algebraisch. Bez. Anzahl der Ellen . . x
Kaufpreis . . . . mx
Geld des Käufers . . $mx-r$
Verkaufspreiß . . . nx
Geld des Verkäufers $r'-nx$,
nämlich das, was er nach dem Verkauf hat, weniger das, was er durch den Verkauf gelöst hat.

Bed. $mx-r=r'-nx$ (statt daß man für die erste Aufgabe hatte $mx-r=r'+nx$)

Red. $mx=r'+r-nx$ (beyderseits r addirt)
$mx+nx=r+r'$ (beyderseits nx addirt)

Aufl. $x=\frac{r+r'}{m+n}$, Anzahl der Ellen, wie vorhin.

$mx=\frac{mr+mr'}{m+n}$ Kaufpreis.

$mx-r=\frac{mr+mr'}{m+n}-\frac{mr+nr}{m+n}=\frac{mr'-nr}{m+n}$, Geld des Käufers.

$nx=\frac{nr+nr'}{m+n}$ Verkaufspreis.

$r'-nx=\frac{mr'+nr'}{m+n}-\frac{nr+nr'}{m+n}=\frac{mr'-nr}{m+n}$, Geld des Verkäufers.

Hätte die Person nach dem Kauf r Gulden übrig behalten, statt daß ihr r fehlten: so würde durch Veränderung des Zeichens von r, $x = \frac{-r+r'}{m+n}$. Wenn hier gegen den eigentlichen Sinn der Aussage, $r > r'$ wird: so zeigt dieses an, daß der erste Handel ein Verkauf, der andere aber ein Kauf gewesen sey.

Es ist sehr nöthig, daß die Lehrlinge sich daran gewöhnen, die für einen gewißen Fall erhaltene Formeln auf die damit verwandten Fälle anzuwenden, welche sich nämlich unter eine Classe mit ihm bringen lassen, wenn man nur bey den gegebenen Größen die Veränderung der Zeichen anbringt, welche ihr Gegensaz erfordert.

§. 13.

Aufgabe. A hat dreymal soviel als B. Nachdem aber jeder 12 Gulden gewonnen hat, so hat A nur noch das Doppelte von B. Wie viel hat jeder?

Arithm. Weil A dreymal so viel hat, als B: so müßte A, wenn B 12 Gulden gewinnt, dreymal zwölf Gulden oder 36 Gulden gewinnen, um noch dreymal soviel zu haben als B. A gewinnt aber statt 36 Gulden nur 12. Nach dem Gewinn fehlen also A 24 Gulden, um noch dreymal soviel zu haben als B. Nun hat A nach dem Gewinn nur zweymal soviel als B; es fehlt also der Person A das, was B nach ihrem Gewinn hat, um dreymal soviel als sie zu haben. Folglich hat B nach ihrem Gewinn 24; und anfänglich 12 Gulden.

Anfängliches Vermög. v. B	12;	zweytes Verm. v. B	12+12=24
. . . . . . A	36,	. . . A	36+12=48.

Algebraisch.

Ben.	Erstes Vermögen von B	x
	. . . . A	3x
	Zweytes Vermögen von B ...	x+12
	. . . . A ..	3x+12; oder
		2(x+12)=2x+24.

Bed. $3x + 12 = 2x + 24$.

Red. $1x + 12 = 24$ (beyderseits $2x$ abgezogen)

$1x = 12$ (beyderseits 12 abgezogen)

Aufl. $x = 12$ Erstes Vermögen von B

$3x = 36$ . . . . A

$x + 12 = 24$ Zweytes Vermögen von B

$3x + 12 = 48$ . . . . A.

Probe. $48 = 2 \times 24$.

Andere Beyspiele. A hat viermal soviel als B. Jeder gewinnt 16 Gulden. Alsdenn hat A nur dreymal soviel als B.

Das Vermögen von A ist drey Viertel des Vermögens von B. Jeder gewinnt 20 Gulden. Alsdenn ist das Vermögen von A $\frac{4}{5}$ des Vermögens von B.

A hat viermal so viel als B. Gewinnt aber A 12 Gulden, und B 16; so hat A nur dreymal soviel als B.

A hat dreymal soviel als B. Wenn aber A dem andern B 15 Gulden abgewinnt; so wird A viermal soviel haben als B.

A hat fünfmal soviel als B. Verliert aber A 16 Gulden, und gewinnt B 24 Gulden; so hat A nur zweymal so viel als B.

Allgemein. Das Vermögen von A ist mmal so gros als das Vermögen von B. Gewinnen aber A die Summe a, und B die Summe b; so hat A nmal soviel als B.

Ben. Erstes Vermögen von B x

. . . . A . . . mx

Zweytes Vermögen von B . . . $x+b$

. . . . A . . $mx+a$ oder $nx+nb$.

Bed. $mx + a = nx + nb$.

Erster Fall. Es sey m = n. Damit die Aufgabe möglich ist, muß a = nb seyn; und alsdenn ist sie unbestimmt. Nämlich, wenn das Vermögen von A das mfache des Vermögens von B ist; und wenn, indem B irgend eine Summe gewinnt, A auch das mfache eben dieser Summe gewinnt: so bleibt das Vermögen von A immer das mfache des Vermögens von B, was auch ihr anfängliches Vermögen seyn mag. Und umgekehrt, soll das Vermögen von A immer das mfache des Vermögens von B seyn, so muß der Gewinn von A auch das mfache des Gewinns von B seyn.

Zweyter Fall. Es sey $m > n$.

Red. $mx = nx + nb - a$ (beyderseits a abgezogen)

$mx - nx = nb - a$ (beyderseits nx abgezogen)

$1x = \frac{nb-a}{m-n}$ (beyderseits durch $m-n$ dividirt.)

Aufl. $x = \frac{nb-a}{m-n}$, erstes Vermögen von B.

$mx = \frac{mnb-ma}{m-n}$, erstes Vermögen von A.

$x+b = \frac{nb-a}{m-n} + \frac{mb-nb}{m-n} = \frac{mb-a}{m-n}$, zweytes Vermög. von B.

$mx+a = \frac{mnb-ma}{m-n} + \frac{ma-na}{m-n} = \frac{mnb-na}{m-n}$, zweytes Verm. v. A.

Probe. $\frac{mnb-na}{m-n} = n \times \frac{mb-a}{m-n}$.

Dritter Fall. Es sey $m < n$: so erhält man auf die nämliche Art $x = \frac{a-nb}{n-m}$.

1. Anmerkung. Die Formeln $\frac{nb-a}{m-n}$ und $\frac{a-nb}{n-m}$, wovon die erste aus der Voraussezung $m > n$, die zweyte aus der Voraussezung $n > m$ gefolgert sind, unterscheiden sich blos durch die Zeichen ihrer Glieder. Da nun diese beyden Ausdrücke gleich sind: so sind zwey Brüche, die nur in den Zeichen ihrer Glieder verschieden sind gleich; nämlich $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$.

Dieser Saz ist klar, wenn a und b Grössen von einerley Art sind; so daß —a und —b zwey Grössen einer nämlichen Art bedeuten, welche den der ersten Grössen entgegen gesezt ist. Denn haben zwey Personen ein gewißes Vermögen a und b, das zwey andere Personen ihnen schuldig sind; so enthalten die Schulden dieser lezten eine die andere eben so vielmal, als das Vermögen der zwey ersten eines das andere enthält.

Sind aber die Grössen a und b nicht von einerley Art, so daß die Grösse b als eine abstracte Zahl anzusehen ist: so haben wir gesehen (§ 7.) daß der Ausdruk $\frac{a}{-b}$, (wenn man auf seinen Ursprung zurük geht) mit dem Ausdruk $-\frac{a}{b}$ gleichbedeutend ist. Die den zwey Ausdrücken $\frac{a}{-b}$ und $-\frac{a}{b}$ entgegen gesezte sind also auch gleichbedeutend. Der dem Ausdruk $\frac{a}{-b}$ entgegen gesezte ist aber $\frac{-a}{-b}$; und der dem Ausdruk $-\frac{a}{b}$ entgegen gesezte ist $+\frac{a}{b}$. Folglich sind die zwey Ausdrücke $\frac{-a}{-b}$ und $\frac{+a}{+b}$ ein und eben derselbe.

2. **Anmerkung.** Wenn man in der aus der Voraussezung $m > n$ hergeleiteten Formel $x = \frac{nb-a}{m-n}$ sezt $m=n$; so erhält man $x = \frac{nb-a}{o}$. Diese Formel ist der Ausdruk der Unmöglichkeit, so lange nb nicht gleich a ist; und sie ist der Ausdruk der Unbestimmtheit, nämlich $\frac{o}{o}$, wenn $nb = a$ ist; welches mit demjenigen übereinstimmt, was bey der Untersuchung des ersten Falls bemerkt worden ist.

3. **Anmerkung.** Wenn $m > n$ ist: so ist das anfängliche Vermögen beyder Personen affirmativ, so lange $nb > a$ ist; es wird aber Null oder subtractiv, je nachdem $nb \overset{=}{<} a$ ist.

4. Anmerkung. Die vorhergehenden Formeln beziehen sich auf die Voraussezung, daß b und a Gewinn, oder additive Größen bezeichnen.

1.) Bedeutet aber b Gewinn, und a Verlust; so bekommt man $x = \frac{nb+a}{m-n}$.

2.) Es sey b Verlust, und a Gewinn; so erhält man $x = \frac{-nb-a}{m-n} = -\frac{nb+a}{m-n}$; welches anzeigt, daß beyder Personen anfängliches Vermögen, Schulden gewesen seyen: wenn anders nicht n größer als m ist; in welchem Fall $x = \frac{nb+a}{n-m}$ wird.

3.) b und a seyen beyde ein Verlust; so bekommt man $x = \frac{-nb+a}{m-n} = \frac{a-nb}{m-n}$. Folglich ist, wenn man m größer als n annimmt, beyder Personen anfängliches Vermögen additiv, oder Null, oder subtractiv, je nachdem $a \gtreqless nb$ ist.

§. 14.

Da die vorhergehenden Beyspiele uns auf Multiplicationen geführt haben; so ist es zweckmäßig, die Regeln derselben zu entwickeln.

1.) Die Größe $a+b$ sey durch m zu multipliciren. So muß man jedes Glied der Größe $a+b$ durch m multipliciren; das Product ist also $ma+mb$.

2.) Soll die Größe $a-b$ durch m multiplicirt werden: so muß man ebenfalls jedes Glied der Größe $a-b$ durch m multipliciren; dabey aber das Zeichen der Subtraction, welches die Größe b hat, und welches auch ihre Producte haben müssen, beybehalten. Man muß nemlich so vielmal b abziehen, wieviel man a nimmt. Nimmt man also a mmal; so muß man auch b mmal abziehen. Das Product von $a-b$ durch m ist demnach $ma-mb$.

3.) Ist die Größe a durch $m+n$ zu multipliciren, so ist das Product $ma+na$.

4.) Die Grösse a sey durch m—n zu multipliciren. Nimmt man a mmal, wodurch man das Product ma bekommt; so hat man a nmal zuviel genommen, und muß es also wieder nmal abziehen. Das Product von a durch m—n ist also ma—na.

5.) Die Grösse a+b sey durch m—n zu multipliciren.

a + b	Multiplicandus
m — n	Multiplicator
ma+mb	Product durch m
na + nb	Prod. durch n, welches abzuziehen ist.
Also ma—na+mb—nb	total Product.

6.) Die Grösse a — b seye durch m — n zu multipliciren.

a — b	Multiplicandus
m — n	Multiplicator
ma — mb	Product durch m
na — nb	Product durch n, welches abzuziehen ist.
ma — na — mb+nb	total Product.

Dieses lezte Beyspiel enthält die allgemeine Regel für die Multiplication in Rüksicht auf die Zeichen. Nämlich das Product zweyer Grössen, welche einerley Zeichen, sey es das der Addition, oder das der Subtraction, vor sich haben, hat immer das Zeichen der Addition: und das Product zweyer Grössen, welche verschiedene Zeichen haben, hat das Zeichen der Subtraction; sey es nun, daß vor dem Multiplicandus das Zeichen der Addition und vor dem Multiplicator das Zeichen der Subtraction stehe, oder umgekehrt. Wobey zu bemerken ist, daß diese Regel aus den ersten Begriffen der Addition und Subtraction hergeleitet ist; dem § 7. gesagten gemäß.

Diese Regel wird auch kurz, aber uneigentlich so ausgedrükt: plus durch plus, und minus durch minus multiplicirt, geben plus; und plus durch minus, oder minus

durch plus multiplicirt geben beyde minus. Dieser sehr gewöhnliche Ausdrück aber, welche anzuzeigen scheint, als ob man mit den Zeichen selbst eine Operation vornähme, die nur bey den Größen, welche diese Zeichen vor sich haben, anschlägt, ist mehr figürlich, als eigentlich, und der in Frage stehenden Operationen angemessen.

Die Division betreffend, haben wir gesehen: daß auch, wenn der Dividendus und der Divisor einerley Zeichen vor sich haben, es sey nun das Zeichen der Addition, oder das der Subtraction, der Quotient der nämliche ist; so daß der Ausdruk $\frac{+a}{+b}$ und $\frac{-a}{-b}$ einerley sind. Ferner haben wir gesehen: daß der Ausdruk $\frac{-a}{+b}$, der dem $\frac{+a}{+b}$ entgegen gesezt ist, auch einerley ist mit dem Ausdruk $\frac{+a}{-b}$, welcher der entgegengesezte von dem $\frac{-a}{-b}$ ist. Und es ist gezeigt worden: daß der Ausdruk $\frac{a}{-b}$ nur in sofern als ein Quotient angesehen werden kann, als man auf seinen Ursprung zurük geht, um ihn auf den Ausdruk $-\frac{a}{b}$ zu bringen.

§. 15.

Aufgabe. A hat 100 Gulden, B 40 Gulden. Wieviel muß jeder gewinnen, damit A nur noch zweymal soviel habe als B.

Durch Räsonnement. Da A 100, und B 40 Gulden hat; so ist der Unterschied ihres Vermögens 60 Gulden: und weil beyde gleichviel gewinnen sollen, so bleibt der Unterschied ihres Vermögens immer 60 Gulden. Die Aufgabe ist daher auf folgende reducirt: Zwey Größen finden, wovon eine das Doppelte der andern ist, und deren Differenz 60 beträgt. Zufolge §. 2. ist also die kleinere dieser zwey Größen 60, und die größere ist 120. Da nun B und A anfänglich 40 und 100 hatten; so ist 20 der Gewinn eines jeden.

Algebraisch.

Ben. Gesuchter Gewinn x

Vermögen von A nach dem Gewinn $100+x$

. . . . B . . . . . . $40+x$.

Bed. $100+x=80+2x$.

Red. $100=80+x$ (beyderseits x abgezogen.)

$20=x$ (beyderseits 80 abgezogen.)

Aufl. $x=20$ gesuchter Gewinn.

$40+x=60$ zweytes Vermögen von B.

$100+x=120$ zweytes Vermögen von A.

Probe. $120=2\times 60$.

Andere Beyspiele. A hat 120 Gulden, B 36. Was muß jeder gewinnen, damit A nur dreymal soviel habe als B?

A hat 64, B 48 Gulden. Wieviel muß jeder verlieren, damit A doppelt soviel habe als B?

Allgemein. A besizt die Summe a, und B die Summe b. Wieviel muß jeder gewinnen, damit A das $m$fache von B habe?

Ben. Gesuchter Gewinn x

Zweytes Vermögen von B . . . . . $b+x$

. . . . A . . . . . $a+x$

Bed. $a+x=mb+mx$.

Erster Fall. Es sey $m=1$. So muß, damit die Aufgabe möglich ist, $a=mb=b$ seyn; und nun ist die Aufgabe unbestimmt. Nämlich, wenn zwey Personen gleichviel haben, so haben sie auch in der Folge immer gleichviel; wenn beyde gleichviel, wieviel es auch seyn mag, gewinnen.

Zweyter Fall. Es sey $m > 1$. So erhält man:

Red. $a - mb = mx - x = x\,(m - 1)$.

Aufl. $x = \frac{a-mb}{m-1}$

$b + x = \frac{mb-b}{m-1} + \frac{a-mb}{m-1} = \frac{a-b}{m-1}$

$a + x = \frac{ma-a}{m-1} + \frac{a-mb}{m-1} = \frac{ma-mb}{m-1}$

Probe. $\frac{ma-mb}{m-1} = m \times \frac{a-b}{m-1}$.

Anmerkung. Sezt man $m > 1$: so muß, damit die gesuchte Grösse ein Gewinn sey, $a > mb$ seyn. Ist aber $a < mb$; so bezieht sich die Aufgabe auf einen Verlust, den beyde Personen leiden müssen.

Wendet man die auf den Fall $m > 1$ sich beziehende Formel $x = \frac{a-mb}{m-1}$ auf den Fall $m = 1$ an: so wird $x = \frac{a-mb}{0}$, und zeigt eine Unmöglichkeit an; wenn nicht auch zugleich $a = mb$, in welchem Fall $x = \frac{0}{0}$ jede Grösse bedeuten kann: dem ersten Fall gemäß.

Dritter Fall. Es sey $m < 1$. So erhält man $x = \frac{mb-a}{1-m}$; und diese Formel hätte aus der für den zweyten Fall $\frac{a-mb}{m-1}$ durch Veränderung der Zeichen ihres Nenners und Zählers hergeleitet werden können.

Unter der Voraussezung $m < 1$, bezieht sich die Aufgabe auf einen Verlust, und nicht auf einen Gewinn, wenn $mb < a$.

§. 16.

Aufgabe. A hat 144, B 90 Gulden. Wieviel muß A von B gewinnen, um zweymal so viel zu haben als B.

Arithm. Weil A 144, und B 90 Gulden hat; so ist die Summe ihres Vermögens 234 Gulden. Und weil A gewinnt, was B verliert; so wird nach dieser Veränderung die Summe ihres Vermögens noch 234 seyn. Nach dieser Veränderung soll aber A zweymal soviel haben als B. Folglich ist die vorgelegte Aufgabe auf folgende reducirt: zwey Zahlen finden, wovon die eine das Doppelte der andern, und deren Summe 234 ist. Nach §. 4. hat also B nach seinem Verlust ein Drittel von 234, d. i. 78; und A hat nach seinem Gewinn 156. Folglich ist der Gewinn von A und der Verlust von B 12.

Algebraisch.

Ben.	Gewinn der Person A Verlust der B	 x
	Zweytes Vermögen von A . . .	$144+x$
	. . . . . . B . . .	$90-x$
Bed.	$144+x=180-2x.$	
Red.	$144+3x=180$ (beyderseits 2x addirt)	
	$3x=36$ (beyderseits 144 abgezogen)	
	$1x=12$ (beyderseits durch 3 dividirt)	
Aufl.	$x=12$ { Gewinn der Person A Verlust der Person B	
	$144+x=156$, zweytes Vermögen von A	
	$90-x=78$, zweytes Vermögen von B.	
Probe.	$156=2\times 78.$	

Andere Beyspiele. A hat 200, B 120 Gulden. Wieviel muß A von B gewinnen, um dreymal soviel zu haben als B.

A hat 240 Gulden, B 100. Wieviel muß A von B gewinnen, um viermal soviel zu haben als B?

Allgemein. A hat die Summe a, B die Summe b.

Wieviel muß A von B gewinnen, um mmal soviel zu haben als B?

Bey. Gewinn der Person A } Verlust der Person B } x

Zweytes Vermögen von A . . . . . a+x

. . . . . . B . . . . . b--x

Bed. $a+x=mb-mx$.

Red. $a+x+mx=mb$ (beyderseits mx addirt)

$x+mx=mb-a$ (beyderseits a abgezogen)

Aufl. $x=\frac{mb-a}{m+1}$ { Gewinn der Person A, Verlust der Person B

$a+x=\frac{ma+a}{m+1}+\frac{mb-a}{m+1}=\frac{ma+mb}{m+1}$ zweytes Verm. v. A.

$b-x=\frac{mb+b}{m+1}-\frac{mb-a}{m+1}=\frac{a+b}{m+1}$ zweytes Verm. von B.

Probe. $\frac{ma+mb}{m+1}=m\times\frac{a+b}{m+1}$.

Anmerkung. Wenn $mb>a$, so ist die Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage aufgelöst. Ist aber $mb<a$; so müssen die Ausdrücke Gewinn und Verlust in die entgegengesezte Verlust und Gewinn verwandelt werden.

§. 17.

Aufgabe. A und B wetten mit einander die Summe a. Wenn A die Wette gewinnt, so hat A zweymal soviel als B. Wenn aber B die Wette gewinnt, so haben beyde gleichviel. Wieviel hat jede?

Arithmetisch. Es scheint anfänglich, man habe drey Zustände des Vermögens dieser zwey Personen zu betrachten: nämlich, ihr anfängliches Vermögen; ihr Vermögen, nachdem A gewonnen, und B verloren hat; und ihr Vermögen, nachdem A verloren und B gewonnen hat. Die Untersuchung läßt sich aber, mit Beyseitsezung ihres an-

fänglichen Vermögens auf die Betrachtung von zwey Zuständen ihres Vermögens zurükbringen; auf folgende Art.

Die Person A hat, wenn sie die Wette gewinnt, 2a mehr, als wenn sie dieselbe verliert; und eben so ist es mit B. Da nun, wenn B gewinnt, beyde gleichviel haben; so reducirt sich, wenn man von diesem Zustand ihres Vermögens ausgeht, die vorgelegte Aufgabe auf folgende:

Zwey Personen A und B haben gleich viel. Gewinnt aber A von B die Summe 2a, so hat A zweymal soviel als B. Diese Aufgabe gehört unter die § 13. aufgelösten. (S. § 15. Anmerk. 4. n° 2.)

Man findet: daß, indem A und B gleichviel haben, jede 6a hat. Und nun ist das um 2a vermehrte Vermögen von A 8a; das um 2a verminderte Vermögen von B 4a. Hieraus ergiebt sich die Antwort auf die anfänglich vorgelegte Aufgabe, wie folgt:

Vermögen von A.		Vermögen von B.	
Erstes Vermögen . . .	7a . . .	Erstes Vermögen . . .	5a
Nach seinem Verlust . .	6a . . .	Nach seinem Gewinn	6a
Nach seinem Gewinn . .	8a . . .	Nach seinem Verlust	4a.

Algebraisch. Bey.

Vermögen von A.		Vermögen von B.	
Nach seinem Verlust . . .	x	Nach seinem Gewinn . .	x
Erstes Vermögen . . .	$x+a$	Erstes Vermögen . .	$x-a$
Nach seinem Gewinn . .	$x+2a$	Nach seinem Verlust	$x-2a$.

Bed. $x+2a=2(x-2a)$

Red. $x+2a=2x-4a$

$x+6a=2x$ (beyderseits 4a addirt)

$6a=x$ (beyderseits x abgezogen)

Aufl. $x=6a$, Vermög. v. A nach seinem Verlust, und von B nach seinem Gewinn.

$x+a=7a$, Erstes Vermögen von A

$x-a=5a$, Erstes Vermögen von B.

$x+2a=8a$, Vermög. v. A nach seinem Gewinn.

$x-2a=4a$, Vermög. v. B nach seinem Gewinn.

Probe. $8a=2\times 4a$.

Andere Beyspiele. Wenn A die Wette gewinnt, so hat A 3mal soviel als B; wenn aber B die Wette gewinnt, so hat A 2mal soviel als B.

Ferner: Wenn A die Wette gewinnt, so hat A die $\frac{3}{4}$ dessen, was B hat; gewinnt aber B die Wette, so hat A nur die $\frac{2}{3}$ dessen, was B hat.

Allgemein. Wenn A die gewettete Summe a gewinnt, so hat A mmal mehr als B; gewinnt aber B die Wette, so hat A nmal mehr als B.

Ben. Vermögen von B		Vermögen von A	
Nach seinem Verlust . .	x	Nach seinem Gewinn . .	mx
Erstes Vermögen . .	x+a	Erstes Vermögen . .	mx—a
Nach seinem Gewinn	x+2a	Nach seinem Verlust	mx—2a.

Bed. $mx - 2a = nx + 2na$

$mx = nx + 2na + 2a$
$= nx + 2a(n+1)$ } (beyderseits 2a addirt)

$mx - nx = 2a(n+1)$ (beyderseits nx abgezogen)

$x = 2a \times \frac{n+1}{m-n}$ (beyderseits durch m—n div.)

Aufl. $x = 2a \times \frac{n+1}{m-n}$, Vermög. v. B nach seinem Verlust.

$x + a = a\left(\frac{2n+2}{m-n} + \frac{m-n}{m-n}\right) = a \times \frac{m+n+2}{m-n}$, Erstes Verm. v. B.

$x + 2a = 2a\left(\frac{n+1}{m-n} + \frac{m-n}{m-n}\right) = 2a \times \frac{m+1}{m-n}$, Vermög. v. B nach seinem Gewinn.

$mx = 2a \times \frac{mn+m}{m-n}$, Vermög. v. A nach seinem Gew.

$mx - a = a\left(\frac{2mn+2m}{m-n} - \frac{m-n}{m-n}\right) = a \times \frac{2mn+m+n}{m-n}$, Erstes Vermög. von A.

$mx - 2a = 2a\left(\frac{mn+m}{m-n} - \frac{m-n}{m-n}\right) = 2a \times \frac{mn+n}{m-n}$, Verm. v. A nach seinem Verlust.

Probe. $2a \times \frac{mn+n}{m-n} = n\left(2a \times \frac{m+1}{m-n}\right)$.

Anmerkung. Insoferne a eine wirkliche Größe ist; kann, wenn die Aufgabe möglich seyn soll, m nicht gleich n seyn. Wendet man die vorhergehende Formeln auf den Fall m=n, und a einer wirklichen Größe an; so findet man das Zeichen der Unmöglichkeit, für den Werth von x nämlich $2a \times \frac{m+1}{0}$. Ist aber a keine Größe, oder ist es Null; so findet man für x den unbestimmten Ausdruk $\frac{0}{n}$. Wenn nämlich die zwey Personen nichts miteinander wetten, und bey einem gewißen Zustand ihres Vermögens die eine mmal mehr hat als die andere: so bleibt diese auch in der Folge mmal reicher als die andere; wenn ihr Vermögen sonst keine Aenderung leidet.

Sezt man $m < n$; so wird der Nenner der vorhergehenden Formeln subtractiv. Geht man aber auf ihren Ursprung, nämlich auf die Gleichung der Bedingung $mx - 2a = nx + 2na$ zurük; so erhält man, unter der Voraussezung, daß n größer als m sey, $x = -2a \times \frac{n+1}{n-m}$; welches anzeigt, daß beyde Personen Schulden hatten.

Allgemeinere Aufgabe. Das Vermögen zweyer Personen A und B ist folgendermaßen beschaffen: Wenn A die Summe a, und zugleich B die Summe b gewinnt, so hat alsdenn A mmal mehr als B; gewinnt aber A die Summe α, und zu gleicher Zeit B die Summe β, so hat alsdenn A das nfache dessen, was B hat. Was ist ihr Vermögen?

Bey. Vermögen von B.

Nach dem Gewinn der Summe b . . .	x
Erstes Vermögen	$x-b$
Nach dem Gewinn der Summe β . . .	$x-b+\beta$.

Vermögen von A.

Nach dem Gewinn der Summe a . . .	mx
Erstes Vermögen	$mx-a$
Nach dem Gewinn der Summe α . . .	$mx-a+\alpha$.

Bed. $mx - a + \alpha = n(x - b + \beta)$

Red. $mx - a + \alpha = nx - nb + n\beta$.

Erster Fall. Es sey $m = n$: damit die Aufgabe möglich sey, muß $a - \alpha = n(b - \beta)$ seyn; und alsdenn ist die Aufgabe unbestimmt.

Zweyter Fall. Es sey $m > n$.

$$mx - nx = a - \alpha - nb + n\beta.$$

$$x = \frac{a - \alpha - nb + n\beta}{m - n}.$$

Dritter Fall. Es sey $m < n$.

$$x = \frac{nb - n\beta - a + \alpha}{n - m}.$$

Die zwey gebrochenen Ausdrücke von x, welche sich nur durch die Zeichen ihrer Glieder unterscheiden, sind einander gleich.

Ich will nun die Auflösung nach dem ersten Ausdruk weiter verfolgen.

Aufl. $x = \frac{a-\alpha-nb+n\beta}{m-n}$, Vermög. d. Person B, wenn sie b gewonn. hat.

$x - b = \frac{a-\alpha-nb+n\beta}{m-n} - \frac{mb-nb}{m-n} = \frac{a-\alpha-mb+n\beta}{m-n}$, erstes Verm. v. B.

$x - b + \beta = \frac{a-\alpha-mb+n\beta}{m-n} + \frac{m\beta-n\beta}{m-n} = \frac{a-\alpha-mb+m\beta}{m-n}$, Vermög. von B, wenn sie b gewonnen hat.

$mx = \frac{ma-m\alpha-mnb+mn\beta}{m-n}$, Verm. v. A, wenn sie a gewonnen hat.

$mx - a = \frac{ma-m\alpha-mnb+mn\beta}{m-n} - \frac{ma-na}{m-n} = \frac{na-m\alpha-mnb+mn\beta}{m-n}$, erstes Vermögen von A.

$mx - a + \alpha = \frac{na-m\alpha-mnb+mn\beta}{m-n} + \frac{m\alpha-n\alpha}{m-n} = \frac{na-n\alpha-mnb+mn\beta}{m-n}$, Vermögen von A, wenn sie a gewonnen hat.

Probe. $\frac{na-n\alpha-mnb+mn\beta}{m-n} = n \times \frac{a-\alpha-mb+m\beta}{m-n}$.

1.) Anmerkung. Wendet man diese Formeln auf den Fall $m = n$ an, so wird z. B. der Werth von $x = \frac{a - \alpha - nb + n\beta}{0}$: welcher Ausdruk Unbestimmtheit oder Unmöglichkeit der Aufgabe anzeigt, je nachdem $a - \alpha - nb + n\beta$ Null ist, oder nicht.

Sezt man m größer als n: so ist der Werth von x additiv, Null, oder subtractiv, je nachdem $a + n\beta$ größer, gleich, oder kleiner als $\alpha + nb$ ist.

2. Anmerkung. Unerachtet in der Aussage der Aufgabe die Größen a, b, α, β, als additiv angegeben worden sind; so lassen sich doch die gefundene Formeln gleichfalls auf die Fälle anwenden, in welchen eine, oder einige dieser Größen subtractiv sind. Und so enthalten die gefundene Formeln, allen verschiedenen Arten zufolge, wie die vier Größen a, α, b, β mit + und — bezeichnet seyn können, die Auflösung 16 besonderer, unter einer allgemeinen Aufgabe begriffener Fragen; nach Angabe folgender Aussage und Tabelle:

Wenn zwey Größen gegebene Veränderungen durch die Addition oder durch die Subtraction leiden, so ist die eine das mfache der andern; und wenn sie andere gegebene Veränderungen durch Addition oder Subtraction leiden, so ist die eine das nfache der andern: Welches sind diese zwey Größen?

a,	α,	b,	β
+	+	+	+
+	+	+	−
+	+	−	+
+	−	+	+
−	+	+	+
+	+	−	−
+	−	+	−
−	+	+	−
+	−	−	+
−	+	−	+
−	−	+	+
+	−	−	−
−	+	−	−
−	−	+	−
−	−	−	+
−	−	−	−

Dieser Tabelle zufolge gibt es nur eine Art, wornach die gegebene vier Grössen alle additiv sind; und auch nur eine, wornach sie alle subtractiv sind.

Es gibt vier Arten, wornach drey additiv und eine subtractiv sind; und eben so auch vier, wornach drey subtractiv und eine additiv sind.

Es gibt sechs Arten, wornach zwey additiv und zwey subtractiv sind.

In dem Fall einer Wette, welcher Anlaß zu dieser Aufgabe gegeben hat, sind die vier Grössen a, α, b, β, ihr Zeichen beyseite gesezt, gleich: Und wenn a als additiv betrachtet wird, so sind α und b subtractiv, und β ist additiv. Die Formel, welche diesem Fall entspricht ist also $x = \frac{a + \alpha + nb + n\beta}{m - n} = \frac{2a + 2na}{m - n} = 2a \times \frac{n + 1}{m - n}$; übereinstim-

mend mit dem für diesen Fall gefundenen Ausdruk des Vermögens der Person B, wenn sie die Wette verliert.

§. 18.

Aufgabe. A und B haben mit einander eine gegebene Summe s. Sie wetten mit einander eine unbekannte Summe. Wenn A die Wette gewinnt, so hat A zweymal so viel als B. Gewinnt aber B, so haben sie gleichviel. Wie hoch belauft sich die Wette?

Durch Räsonnement. Weil die eine Person gewinnt, was die andere verliert, so bleibt die Summe ihres Vermögens immer einerley; nämlich s. Wenn aber B gewinnt, so hat die eine so viel als die andere; folglich hat alsdenn jede $\frac{1}{2}$s.

Weil A, nachdem sie gewonnen, zweymal soviel hat, als B, nachdem sie verloren: so hat alsdenn A $\frac{2}{3}$s, und B $\frac{1}{3}$s.

Da A, wenn sie die Wette gewinnt, $\frac{2}{3}$s; und wenn sie dieselbe verliert, $\frac{1}{2}$s hat, so ist, was A, wenn sie gewinnt, mehr hat, als wenn sie verliert, der Ueberschuß von $\frac{2}{3}$s über $\frac{1}{2}$s, das ist $\frac{1}{6}$s.

Nun ist aber der Unterschied dessen, was A hat, wenn sie gewinnt, und wenn sie verliert, das Doppelte von dem Belauf der Wette: folglich ist dieser die Hälfte von jenem Ueberschuß, nämlich $\frac{1}{12}$s.

Vermögen von A.	Vermögen von B.
Nach seinem Verlust .... $\frac{1}{2}$s.	Nach seinem Gewinn ... $\frac{1}{2}$s.
Erstes Verm. $\frac{1}{2}s+\frac{1}{12}s=\frac{7}{12}s$.	Erstes Verm. $\frac{1}{2}s-\frac{1}{12}s=\frac{5}{12}s$.
Nach sein. Gew. $\frac{7}{12}s+\frac{1}{12}s=\frac{2}{3}s$.	Nach sein. Verl. $\frac{5}{12}s-\frac{1}{12}s=\frac{1}{3}s$.

Algebraisch.

Vermögen der Person B nach ihrem Gewinn . . . $\frac{1}{2}$s.

. . . . A nach ihrem Verlust . . . $\frac{1}{2}$s.

Bez. Belauf der Wette x
Erstes Vermögen von B . . . . $\frac{1}{2}s - x$
. . . . . A . . . . $\frac{1}{2}s + x$
Vermög. der Person B nach ihrem Verl. $\frac{1}{2}s - 2x$
. . . . . A nach ihrem Gew. $\frac{1}{2}s + 2x$.

Bed. $\frac{1}{2}s + 2x = 2(\frac{1}{2}s - 2x)$.

Red. $\frac{1}{2}s + 2x = s - 4x$
$s + 4x = 2s - 8x$ (beyderseits durch 2 multiplic.)
$s + 12x = 2s$ (beyderseits 8x addirt)
$12x = s$ (beyderseits s subtrahirt).

Aufl. $x = \frac{1}{12}s$, Belauf der Wette.
$\frac{1}{2}s - x = \frac{5}{12}s$, Erstes Vermögen von B.
$\frac{1}{2}s + x = \frac{7}{12}s$, Erstes Vermögen von A.
$\frac{1}{2}s - 2x = \frac{4}{12}s = \frac{1}{3}s$, zweytes Vermögen von B.
$\frac{1}{2}s + 2x = \frac{8}{12}s = \frac{2}{3}s$, zweytes Vermögen von A.

Probe. $\frac{2}{3}s = 2 \times \frac{1}{3}s$.

Andere Beyspiele. Wenn A die Wette gewinnt, so hat A dreymal soviel als B: verliert sie aber A, so hat A nur zweymal soviel als B.

A hat, wenn sie die Wette gewinnt, $\frac{3}{4}$; wenn sie verliert, $\frac{2}{3}$ dessen, was B hat.

Allgemein. A hat, wenn sie gewinnt, das mfache; wenn sie aber verliert, das nfache dessen, was B hat.

§. 19.

Aufgabe. Das Vermögen von 4 Personen A, B, C, D, wird durch folgende Bedingungen bestimmt:

die Summe des Vermögens von A und B ist 100 Gulden;
die Summe des Vermögens von C und D ist 120 Gulden;
das Vermögen von A ist das Doppelte des Vermögens von C;
und das Vermögen von D ist das Dreyfache des Vermögens v. B.

Durch Räsonnement. Weil A zweymal soviel hat als C: so würde, wenn die Summe des Vermögens von A und B das Doppelte der Summe des Vermögens von C und D wäre, auch B zweymal so viel haben als D. Die Summe des Vermögens von A und B ist aber, statt das Doppelte von 120, oder 240 zu seyn, nur 100. Folglich fehlen der Person B 140 Gulden, um zweymal soviel zu haben, als D. Nun hat D dreymal soviel als B. Das Doppelte des Vermögens von D ist also das sechsfache des Vermögens von B; und der Person B fehlt das fünffache ihres Vermögens, um zweymal soviel zu haben als D. Diesemnach beträgt das fünffache Vermögen von B 140 Gulden; und ihr einfaches Vermögen ist der fünfte Theil von 140, also 28 Gulden.

Vermögen von B 28, Vermög. von A $100-28=72$
. . . . D $3\times28=84$, ... C $120-84=36$.

Algebraisch.

Ben.	Vermögen von	C	x
	. . . .	A	$2x$
	. . . .	B	$100-2x$
	. . . .	D	$120-x$.

Bed. $120-x=3(100-2x)$.

Red. $120-x=300-6x$

$120+5x=300$ (beyderseits 6x addirt)

$5x=180$ (beyderseits 120 abgezogen)

$1x=36$ (beyderseits durch 5 dividirt).

Aufl. $x=36$ Vermögen von C

$2x=72$ Vermögen von A

$100-2x=28$ Vermögen von B

$120-x=84$ Vermögen von D.

Probe. $84=3\times28$.

Andere Beyspiele.

A und B haben mit einander	120
C und D	160.

A hat dreymal soviel als C.

D hat viermal soviel als B.

A und B haben mit einander	180.
C und D	240.

Das Vermögen von A ist ein und ein halbmal so gros als das Vermögen von B.

Das Vermögen von D ist ein und zwey drittelmal so gros als das Vermögen von B.

Allgemein. Die Summe des Verm. von A und B ist a.
Die Summe des Verm. von C und D ist b.
A hat mmal soviel als C.
D hat nmal soviel als B.

Was hat jede?

Ben.	Vermögen von C	x
	. . . . . A	mx
	. . . . . B	$a-mx$
	. . . . . D	$b-x.$

Bed. $b-x=n(a-mx).$

Red. $b-x=na-mnx.$

Erster Fall. Es sey $mn=1$: so muß $na=b$ seyn; und die Aufgabe ist entweder unbestimmt, oder unmöglich, je nachdem diese lezte Bedingung statt hat, oder nicht.

Wenn nämlich $a=mb$: so ist, weil $A=mC$,

$$a-A=mb-mC=m(b-C)$$

oder $B=mD.$

Unter der Voraussezung $D = nB$: hat man also

$$B = mnB,$$

und $1 = mn$.

Umgekehrt: Wenn $mn = 1$: so ist

$$a = mb,$$

$$na = mnb = b.$$

Zweyter Fall. Es sey $mn > 1$.

Red. $mnx - x + b = na$ (beyderseits mnx addirt)

$mnx - x = na - b$ (beyderseits b abgezogen)

$x(mn - 1) = na - b$.

Aufl. $x = \frac{na - b}{mn - 1}$, Vermögen von C,

$mx = \frac{mna - mb}{mn - 1}$, Vermögen von A,

$a - mx = \frac{mna - a}{mn - 1} - \frac{mna - mb}{mn - 1} = \frac{mb - a}{mn - 1}$, Vermög. von B,

$b - x = \frac{mnb - b}{mn - 1} - \frac{na - b}{mn - 1} = \frac{mnb - na}{mn - 1}$, Vermögen von D.

Probe. $\frac{mnb - na}{mn - 1} = n \times \frac{mb - a}{mn - 1}$.

Dritter Fall. Es sey $mn < 1$.

Man findet eben so: $x(1 - mn) = b - na$

$x = \frac{b - na}{1 - nm}$; und dieser Ausdruk unterscheidet sich von dem, der Voraussezung $mn > 1$ entsprechenden nur durch die Zeichen der beyden Glieder des Bruchs.

1. Anmerkung. Wendet man die auf die Voraussezung $mn > 1$ sich beziehende Formeln auf die Voraussezung $mn = 1$ an; so findet man $x = \frac{na - b}{0}$: welcher Ausdruk die Unmöglichkeit der Aufgabe anzeigt; wenn nicht zugleich $na = b$ ist, in welchem Fall die Aufgabe unbestimmt ist: demjenigen gemäß, was bey dem ersten Fall ist bemerkt worden.

Anmerkung. Wenn bey der Voraussezung $mn > 1$, zugleich $\left\{\begin{matrix} na > b \\ mb > a \end{matrix}\right\}$ sind; so ist die Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage aufgelößt.

Im Gegentheil, wenn $mn < 1$; so ist die Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage aufgelöst, wenn $\left\{\begin{matrix} na < b \\ mb < a \end{matrix}\right\}$.

Ist $mn > 1$, und $na < b$; so wird $mb > a$.

Denn, weil $\left\{\begin{matrix} mn > 1 \\ mna > a \end{matrix}\right\}$, aber $b > na$; so ist $mb > mna$, und noch viel mehr $mb > a$.

Die Werthe des Vermögens von C und A verändern also nun ihr Zeichen; die von D und B aber behalten es. Und die Größen a und b geben den Ueberschuß des Vermögens von B und D über das von A und C an.

Wenn $mn > 1$, und $mb < a$ ist; so wird $na > b$: das Vermögen von B und D ändern ihre Zeichen; und die Größen a und b sind beziehungsweise der Ueberschuß des Vermögens von A und C über das Vermögen von B und D.

Wenn $mn < 1$, und $b < na$ ist: so wird $a > mb$; und das Vermögen von A und C ändern ihre Zeichen. Ist aber $mn < 1$, und $a < mb$: so wird $b > na$; und das Vermögen von B und D ändern ihre Zeichen.

Die unter der Voraussezung, daß die gegebene Größen a und b die Summen seyn, die eine des Vermögens von A und B, die andere des Vermögens von C und D, abgefaßte Aufgabe begreift also auch die Aufgaben in sich, in welchen die Größen a, b die Differenzen jener Vermögen angeben: nämlich, entweder den Ueberschuß des Vermögens von A und C über das von B und D; oder den Ueberschuß des Vermögens von B und D über das von A und C.

§ 20.

§. 20.

Aufgabe. Das Vermögen von 4 Personen wird durch folgende Bedingungen bestimmt:

A und B haben zusammen 120 Gulden; D hat 24 Gulden mehr, als C; A hat zweymal soviel als C; und D dreymal soviel als B.

Wie viel hat jede?

Durch Räsonnement. Da A zweymal soviel hat, als C; und D 24 Gulden mehr hat, als C: so wäre, wenn das Vermögen von A um das Doppelte von 24 Gulden, das heißt, um 48 Gulden vermehrt würde, das Vermögen von A nach dieser Vermehrung das Doppelte des Vermögens von D, das ist, das sechsfache des Vermögens von B. Durch diese Vermehrung des Vermögens von A würde aber auch die Summe des Vermögens von A und B B um 48 Gulden vermehrt; folglich 168 Gulden werden. Die vorgelegte, auf 4 Personen sich beziehende Aufgabe reducirt sich also auf folgende nur zwey Personen A und B betreffende, von denen man weißt: daß die Summe ihres Vermögens 168 ist; und daß die eine 6mal mehr hat, als die andere. Das Vermögen von B ist demnach (§ 4.) der 7te Theil von 168, oder 24; das um 48 Gulden vermehrte Vermögen von A, $168 - 24 = 144$; und ihr anfängliches Vermögen ist $144 - 48 = 96$.

Vermögen von	A	96
. . . . .	B	24
. . . . .	D	72
. . . . .	C	$72 - 24 = 48$.

Algebraisch.

Bey. Vermögen von	C	x
. . . . . .	D	$x + 24$
. . . . . .	A	$2x$
. . . . . .	B . . .	$120 - 2x$

Bed. $x + 24 = 3(120 - 2x)$.

Red. $x + 24 = 360 - 6x$

$7x + 24 = 360$ (beyderseits 6x addirt)

$7x = 336$ (beyderseits 24 abgezogen)

$1x = 48$ (beyderseits durch 7 dividirt).

Aufl. $x = 48$ Vermögen von C

$x + 24 = 72$ Vermögen von D

$2x = 96$ Vermögen von A

$120 - 2x = 24$ Vermögen von B.

Probe. $72 = 3 \times 24$.

Allgemein. Die Summe des Vermögens von A und B sey a.

Der Ueberschuß des Vermögens von D über das von C sey b.

Das Vermögen von A sey das mfache des Vermögens von C.

Das Vermögen von D sey das nfache des Vermögens von B.

Was hat jede Person?

Ben. Vermögen von C x

. . . . . A . . . . . . mx

. . . . . D . . . . x + b

. . . . . B . . . . . . a — mx

Bed. $x + b = n(a - mx)$.

Red. $x + b = na - mnx$

$x + mnx + b = na$ (beyderseits mnx addirt)

$x + mnx = na - b$ (beyderseits b subtrahirt)

Aufl. $x=\frac{na-b}{mn+1}$, Vermögen von C

$mx=\frac{mna-mb}{mn+1}$, Vermögen von A

$x+b=\frac{na-b}{mn+1}+\frac{mnb+b}{mn+1}=\frac{na+mnb}{mn+1}$, Vermögen v. D.

$a-mx=\frac{mna+a}{mn+1}-\frac{mna-mb}{mn+1}=\frac{a+mb}{mn+1}$, Vermögen v. B.

Probe. $\frac{na+mnb}{mn+1}=n\times\frac{a+mb}{mn+1}$.

Anmerkung. Wenn $na>b$ ist; so ist die Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage aufgelöst. Ist $na<b$; so verändern das Vermögen von A und C ihre Zeichen: die Größe a wird der Ueberschuß des Vermögens von B über das von A, und die Größe b wird die Summe des Vermögens von C und D; wenn man die durch die Formeln als subtractiv angegebene Vermögen von A und C als additiv betrachtet.

§. 21.

Aufgabe. Das Vermögen von 6 Personen, A, B, C, D, E, F, ist durch folgende Bedingungen bestimmt:

die Summe des Vermögens von A und B ist . . . a
die Summe des Vermögens von C und D ist . . . b
die Summe des Vermögens von E und F ist . . . c
das Vermögen von A ist das Doppelte des Vermögens v. C,
das Vermögen von D ist das Dreyfache des Vermögens v. E,
das Vermögen von F ist das Vierfache des Vermögens v. B,

Wie viel hat jeder?

Arithmetisch. Da das Vermögen von A das Doppelte des Vermögens von C ist; so wird, wenn die Summe des Vermögens von A und B das Doppelte der Summe des Vermögens von C und D ist, auch das Vermögen von B das Doppelte des Vermögens von D seyn. Dieses

ist aber das Dreyfache des Vermögens von E: folglich wird das Vermögen von B das 6fache des Vermögens von E seyn. Das 4fache des Vermögens von B ist also das 24fache des Vermögens von E. Das Vermögen von F aber ist das 4fache des Vermögens von B; folglich ist das Vermögen von F das 24fache des Vermögens von E: und die vorgelegte 6 Vermögen betreffende Aufgabe ist auf eine nur zwey in Frage stellende reducirt: nämlich, die Summe des Vermögens von E und F ist c, und das Vermögen von F ist das 24fache des Vermögens von E. Hieraus ergibt sich:

Vermögen von	E	$\frac{1}{25}c$,
. . . .	F	$\frac{24}{25}c$
. . . .	B	$\frac{6}{25}c$
. . . .	D	$\frac{3}{25}c$
. . . .	A . . .	$a - \frac{6}{25}c = 2b - \frac{6}{25}c$
. . . .	C . . .	$b - \frac{3}{25}c$.

2.) Die Summe des Vermögens von A und B sey weniger als das Doppelte der Summe des Vermögens von C und D. Man denke sich eine Person A', deren Vermögen mit dem von A zusammen das Doppelte der Summe des Vermögens von C und D sey. So wird das Vermögen von A' das Doppelte des Vermögens von D seyn; und der Ueberschuß des Vermögens von A' über das von B ist $2b - a$. Weil das Vermögen von A' das Doppelte des Vermögens von D; und dieses das dreyfache des Vermögens von E ist; so ist das Vermögen von A' das 6fache des Vermögens von E. Folglich ist die von 6 Personen A, B, C, D, E, F, vorgelegte Aufgabe, auf folgende von 4 Personen A', B, E, F reducirt: der Ueberschuß des Vermögens von A' über das Vermögen von B ist $2b - a$; die Summe des Vermögens von E und F ist c; das Vermögen von A' ist das 6fache des Vermögens von E; und das Vermögen von F ist das 4fache des Vermögens von B.

Nach § 20. findet man das Vermögen dieser 4 Personen folgendermaßen bestimmt:

Vermögen von A' $\frac{-24a+48b+6c}{25}$

B $\frac{a-2b+6c}{25}$

E $\frac{-4a+8b+c}{25}$

F $\frac{4a-8b+24c}{25}$; und hieraus folgt

das Vermögen von A $\frac{24a+2b-6c}{25}$

C $\frac{12a+b-3c}{25}$

D $\frac{-12a+24b+3c}{25}$

3.) Die Summe des Vermögens von A und B sey mehr als das Doppelte der Summe des Vermögens von C und D. Verfährt man hiebey eben so, wie n° 2: so ergibt sich der Ueberschuß des Vermögens von B über das von A' gleich $a-2b$; und die Ausdrücke für die 6 gesuchte Vermögen bleiben die nämliche.

Algebraisch.

Ben. Vermögen von C . . . x

. . . . A . . . $2x$

. . . . B . . $a-2x$

. . . . D . . $b-x$

. . . . F . . $4a-8x$

. . . . E $c-(4a-8x)=c-4a+8x$.

Bed. $b-x=3(c-4a+8x)$

Red. $b-x=3c-12a+24x$

$b=3c-12a+25x$

$12a+b-3c=25x$

Aufl. $x=\frac{12a+b-3c}{25}$, Vermögen von C.

$2x=\frac{24a+2b-6c}{25}$, Vermögen von A.

$a-2x=\frac{a-2b+6c}{25}$, Vermögen von B.

$b-\ x=\frac{-12a+24b+3c}{25}$, Vermögen von D.

$4a-8x=\frac{4a-8b+24c}{25}$, Vermögen von F.

$c-4a+8x=\frac{-4a+8b+c}{25}$, Vermögen von E.

Probe. $\frac{-12a+24b+3c}{25}=3\times\frac{-4a+8b+c}{25}$.

Anmerkung. Damit alle diese Größen additiv seyen; müssen zugleich:

$$a > 2(b-3c)$$
$$12a > 3c-b$$
$$4a < 8b+c \text{ seyn.}$$

Allgemein.

Das Vermögen von A sey das lfache des Vermög. von C
. . . . D . . m . . . . . E
. . . . F . . n . . . . . B.

Ben. Vermögen von C x
. . . . A lx
. . . . D . . . . . $b-x$
. . . . B . . . . . $a-lx$
. . . . F . . . . . $na-nlx$
. . . . E . . . . . $c-na+lnx$.

Bed. $b-x=m(c-na+lnx)$.

Red. $b-x=mc-mna+lmnx$

$b=mc-mna+(lmn+1)x$

$mna+b-mc=(lmn+1)x$.

Aufl. $x = \frac{mna+b-mc}{lmn+1}$, Vermögen von C.

$lx = \frac{lmna+lb-lmc}{lmn+1}$, Vermögen von A.

$b - x = \frac{lmnb+b}{lmn+1} - \frac{mna+b-mc}{lmn+1} = \frac{-mna+lmnb+mc}{lmn+1}$, Verm. v. D.

$a - lx = \frac{lmna+a}{lmn+1} - \frac{lmna+lb-lmc}{lmn+1} = \frac{a-lb+lmc}{lmn+1}$, Verm. v. B.

$na - lnx = \frac{na-lnb+lmnc}{lmn+1}$, Vermögen von F.

$c - na + lnx = \frac{lmnc+c}{lmn+1} - \frac{na-lnb+lmnc}{lmn+1} = \frac{-na+lnb+c}{lmn+1}$, Verm. v. E.

Probe. $\frac{-mna+lmnb+mc}{lmn+1} = m \times \frac{-na+lnb+c}{lmn+1}$.

1. Anmerkung. Da die gegebene Größen l, m, n, affirmativ sind; so ist die Aufgabe immer möglich und bestimmt, indem der Nenner in dem Ausdruk der gesuchten Vermögen niemals Null ist. Dis hat nicht statt, wenn die Aufgabe nur auf vier Größen gestellt ist (§ 19.)

2. Anmerkung. Damit die gefundene Formeln die vorgelegte Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage beantworteten; das heißt, damit alle gesuchte Größen additiv seyen: müßen $\begin{cases} mna + b > mc \\ a + lmc > lb \\ lnb + c > na \end{cases}$ seyn. Wo nicht; so werden die gegebene Größen Differenzen, und nicht Summen der gesuchten Größen.

Sind z. B. $mna + b > mc$
$a + lmc > lb$
aber $lnb + c < na$; so verändern das Vermögen von D und E ihr Zeichen: und betrachtet man sie als additiv; so sind die gegebene Größen b, c der Ueberschuß des Vermögens von C und F beziehungsweise über das von D und E.

§. 22.

Aufgabe. Das Vermögen von 6 Personen A, B, C, D, E, F wird durch folgende Bedingungen bestimmt:

Der Ueberschuß des Vermögens von A über das von B ist a.

Der Ueberschuß des Vermögens von C über das von D ist b.

Der Ueberschuß des Vermögens von E über das von F ist c.

Das Vermögen von A ist das doppelte des Vermögens v. D.
Das Vermögen von C ist das dreyfache des Vermögens v. F.
Das Vermögen von E ist das vierfache des Vermögens v. B.

Was hat jede?

Arithmetisch. Weil das Vermögen von A das doppelte des Vermögens von D ist; so würde, wenn der Ueberschuß des Vermögens von B über das von A das doppelte des Ueberschußes des Vermögens von C über das von D wäre, auch das Vermögen von B das doppelte des Vermögens von C seyn. Man nehme also eine siebente Person A' an, deren Vermögen das von A um 2b übertreffe. Da das Vermögen von A das von B um die Größe a übersteigt; so wird das Vermögen von A' das von B um die Größe a+2b übertreffen. Weil das Vermögen von A' das doppelte des Vermögens von C; und dieses das dreyfache des Vermögens von F ist: so ist das Vermögen von A' das 6fache des Vermögens von F. Die vorgelegte Aufgabe von 6 Personen reducirt sich also auf folgende von nur 4 Personen: der Ueberschuß des Vermögens von A' über das von B ist 2b+a; und der Ueberschuß des Vermögens von E über das von F ist c; das Vermögen von A' ist das 6fache des Vermögens von F; und das Vermögeu von E ist das 4fache des Vermögens von B. Nach § 19. Anmerk. 2.

findet man folgende Ausdrücke des Vermögens dieser 4 Personen:

Vermögen von	A'	. . .	$\frac{48b+24a+6c}{23}$
	B	. . .	$\frac{2b+a+6c}{23}$
	E	. . .	$\frac{8b+4a+24c}{23}$
	F	. . .	$\frac{8b+4a+c}{23}$
Hieraus: Vermögen von	A	. . .	$\frac{2b+24a+6c}{23}$
	D	. . .	$\frac{b+12a+3c}{23}$
	C	. . .	$\frac{24b+12a+3c}{23}$.

Algebraisch.

Ben. Vermögen von	D	. . .	x
. . . .	C	. . .	$b+x$
. . . .	A	. . .	$2x$
. . . .	B	. . .	$2x-a$
. . . .	E	. . .	$8x-4a$
. . . .	F	. . .	$8x-4a-c$.

Bed. $b+x=3(8x-4a-c)$.

Red. $b+x=24x-12a-3c$

$$b=23x-12a-3c$$

$12a+b+3c=23x$.

Aufl. $x=\frac{12a+b+3c}{23}$, Vermögen von . . D

$b+x=\frac{12a+24b+3c}{23}$ C

$2x=\frac{24a+2b+6c}{23}$ . . . . A

$2x-a=\frac{24a+2b+6c}{23}-\frac{23a}{23}=\frac{a+2b+6c}{23}$ . . . B

$$8x - 4a = \frac{4a + 8b + 24c}{23} \quad . \; . \; . \; E$$

$$8x - 4a - c = \frac{4a + 8b + c}{23} \quad . \; . \; . \; F.$$

Probe. $\frac{12a + 24b + 3c}{23} = 3 \times \frac{4a + 8b + c}{23}$.

Allgemein. Der Ueberschuß des Vermögens von A über das von B ist a.

Der Ueberschuß des Vermögens von C über das von D ist b.

Der Ueberschuß des Vermögens von E über das von F ist c.

A hat lmal soviel als D.
C hat mmal soviel als F.
E hat nmal soviel als B.

Was hat jeder im Vermögen?

Ben. Vermögen von	D	x
. . . .	C	$x + b$
. . . .	A	lx
. . . .	B	$lx - a$
. . . .	E	$lnx - na$
. . . .	F	$lnx - na - c$.

Bed. $x + b = m(lnx - na - c)$.

Red. $x + b = lmnx - mna - mc$

$x + mna + mc + b = lmnx$.

Soll die Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage möglich seyn, so muß $lmn > 1$ seyn. Ist $lmn = 1$: so muß $mna + mc + b = 0$ seyn; und alsdenn ist die Aufgabe unbestimmt, und unabhängig von dem Werth von x.

$$x(lmn - 1) = mna + mc + b.$$

Aufl. $x = \frac{mna + b + mc}{lmn - 1}$, Vermögen von D.

$x + b = \frac{mna + lmnb + mc}{lmn - 1}$ . . . . . C.

$lx = \frac{lmna + lb + lmc}{lmn - 1}$ . . . . . A.

$lx - a = \frac{a + lb + lmc}{lmn - 1}$ . . . . . B.

$lnx - na = \frac{na + lnb + lmnc}{lmn - 1}$ . . . . . E.

$lnx - na - c = \frac{na + lnb + c}{lmn - 1}$ . . . . . F.

Probe. $\frac{mna + lmnb + mc}{lmn - 1} = m \times \frac{na + lnb + c}{lmn - 1}$.

1. Anmerkung. Werden die Größen a, b, c, in dem eigentlichen Sinn der Aussage genommen, nämlich als Ueberschüsse des Vermögens von A, C, E über die von B, D, F: so ist die Aufgabe nur möglich, wenn $lmn > 1$; und insbesondere ist sie unmöglich, wenn $lmn = 1$.

Nimmt man $lmn < 1$: so gibt die Formel $x = \frac{mna + b + mc}{lmn - 1}$, welche sich in die $x = -\frac{mna + b + mc}{1 - lmn}$ verwandelt, zu erkennen, daß das Vermögen von D in Schulden bestehe.

Das Vermögen der 6 Personen sind nämlich nun Schulden.

Und die Schulden von B, D, F, übersteigen beziehungsweise die Schulden von A, C, E, um die Größen a, b, c.

Verändert man die Zeichen der Größen a, b, c; so geben sie beziehungsweise den Ueberschuß des Vermögens von B, D, F über das von A, C, E an. Die Formel $x = \frac{mna + b - mc}{lmn - 1}$ würde z. B. die Aufgabe beantworten, worinn die Größen a, -b, c beziehungsweise den Ueberschuß des Vermögens von A, C, F, über das von B, D, E bedeuten. Und wenn hier $lmn = 1$; so ist die Aufgabe un=

bestimmt, oder unmöglich, je nachdem mna+b und mc gleich oder ungleich sind.

2. Anmerk. Auf eben die Art löset man die ähnliche Aufgaben mit 8, 10, 12...... Größen auf, deren Summen oder Differenzen paarweise bekannt sind.

§. 23.

Aufgabe. Eine Zahl besteht aus zwey Ziffern; deren Summe, ohne Rücksicht auf ihre Localwerthe, 9 ausmacht. Addirt man zu dieser Zahl 27; so bekommt man eine Zahl, welche aus den nämlichen, aber in umgekehrter Ordnung gesezten Ziffern besteht. Welches sind die Ziffern dieser Zahl?

Durch Räsonnement. Weil die Summe der Ziffern der gesuchten Zahl 9 ist; so ist diese Zahl eine von den folgenden {18, 27, 36, 45 / 81, 72, 63, 54; deren je zwey und zwey unter einander gesezte aus einerley Ziffern bestehen. Ihre respectiven Unterschiede sind 63, 45, 27, 9; von denen der dritte 27 der gegebenen Differenz gleich ist. Die gesuchte Zahlen sind also 36 und 63.

Algebraisch.

Ben.	Einheiten der ersten Zahl	x
	Zehner	9—x
	Werth der Zehner	90—10x
	Erste Zahl	90— 9x
	Einheiten der zweyter Zahl	9— x
	Zehner	x
	Werth der Zehner	10x
	Zweyte Zahl	9+9x

Bed. $9+9x=90-9x+27$.

Red. $9 + 9x = 117 - 9x$

$9x = 108 - 9x$

$18x = 108.$

Aufl. $x = 6$, Einheiten der ersten Zahl, und Zehner der zweyten.

$9 - x = 3$, Zehner der ersten Zahl, und Einheiten der zweyten.

$90 - 9x = 36$, Erste Zahl.

$9x + 9 = 63$ Zweyte Zahl.

Probe. $63 = 36 + 27.$

Anmerkung. Wenn die Summe der Ziffern einer aus zwey Ziffern bestehenden Zahl, 9 ist; so ist die Summe dieser Zahl und der aus den nämlichen in umgekehrter Ordnung gesezten Ziffern bestehenden Zahl 99. Folglich, wenn, statt der Differenz der zwey Zahlen, ihre Summe als zweyte Bedingung gegeben würde; so wäre die Aufgabe unbestimmt.

Allgemein. Es seyen m und n die Ziffern der Einheiten und der Zehner der aus zwei Ziffern bestehenden Zahl: so ist diese Zahl $10n + m$; und die aus den nämlichen, in umgekehrter Ordnung gesezten Ziffern bestehenden Zahl ist $10m + n$. Demnach ist die Summe dieser zwey Zahlen $11m + 11n = 11(m + n)$: das heißt die Summe von zwey aus einerley zwey Ziffern bestehenden Zahlen, deren eine die umgekehrte der andern ist, ist das 11fache der Summe ihrer Ziffern; und folglich bestimmt eine dieser Summen die andere.

Der Unterschied eben dieser zwey Zahlen, wenn die zweyte größer als die erste angenommen wird, ist $9m - 9n = 9(m - n)$: das heißt, der Unterschied von zwey aus einerley zwey Ziffern bestehenden Zahlen, deren eine die umgekehrte der andern ist, ist das 9fache des Unterschieds ihrer Ziffern; folglich bestimmen auch diese zwey Unterschiede einander wechselseitig.

So wie die gegebene Summe der zwey Ziffern gerad oder ungerad ist; so ist auch der Unterschied der zwey Zahlen gerad oder ungerad. Da der gegebene Unterschied der zwey Zahlen ein vielfaches von 9 seyn muß; so wird, wenn man ihn durch 9 dividirt, die Aufgabe auf die reducirt: zwey Größen finden, nämlich die zwey Ziffern der gesuchten Zahl, deren Summe und Differenz man kennt.

§. 24.

Aufgabe. Einer kauft 20 Ellen Zeug von zweyerley Gattung. Von der einen kostet die Elle 14 Bazen, von der andern 12 Bazen. Im Ganzen bezahlt er 258 Bazen.

Wiviel sind es Ellen von jeder Gattung?

Durch Räsonnement Hätte er alle Ellen im ersten Preis gekauft, so würde er 20 × 14 oder 280 bezahlt haben. Er bezahlt aber wirklich nur 258 Bazen: folglich würde er 22 Bazen mehr bezahlt haben, als er wirklich bezahlt hat.

Dieser Unterschied rührt daher, daß wir angenommen haben, er habe nur Ellen zu 14 Bazen gekauft; statt daß er auch einige zu 12 Bazen die Elle gekauft hat, für deren jede er also 2 Gulden weniger bezahlte. Der ganze Unterschied der 22 Bazen kommt demnach daher, daß wir 2 Bazen so vielmal zuviel genommen haben, als er Ellen zu 12 Bazen gekauft hat. Folglich finden wir, wieviel Ellen der zweyten Gattung er gekauft hat, wenn wir 22 durch 2 dividiren. Der Quotient 11 ist also die Anzahl der Ellen zu 12 Bazen.

Ellen zu 12 Bazen . . .	11	Preis derselben . . .	132
. . . 14	9	. . . .	126
		Summe der Preise	258.

Algebraisch.

Ben.	Ellen zu 14 Bazen	x
	. . . 12	$20-x$
	Preis der ersten Ellen	$14x$
	. . . . andern	$240-12x$
	Totalpreis	$240+2x.$

Bed. $240+2x=258.$

Red. $2x=18$ (beyderseits 240 abgezogen)

$1x=9$ (beyderseits durch 2 dividirt)

Aufl. $x=9$ Ellen zu 14 Bazen

$20-x=11$ . . 12 . . .

$14x=126$ Preis der Ellen zu 14 Bazen

$240-12x=132$ . . . . 12 . . .

$240+2x=258$ Totalpreis.

Probe. $258=258.$

Andere Beyspiele. Es ist jemand bey zwey verschiedenen Handlungen zusammen mit 10000 Gulden intereßirt. Er gewinnt in der einen 10, in der andern 12 pro Cent. Sein ganzer Jahrsgewinn beträgt 1080 Gulden. Wieviel hat er in jeder Handlung stehen?

Eine Person legt 2000 Gulden, theils zu 5, theils zu 4 pro Cent an. Sie bezieht daraus überhaupt 920 Gulden Interesse.

Angenommen, daß 19 Unzen Gold außer dem Wasser nur 18 Unzen im Wasser wägen; und daß 11 Unzen Silber außer dem Wasser, nur 10 Unzen im Wasser wägen; fragt sich: wie viel Unzen von jedem eine aus Gold und Silber zusammengesezte Masse enthalte, die ausser dem Wasser 459 Unzen, und in dem Wasser nur 426 Unzen wiegt?

Auf dieses lezte Beyspiel lauft die berühmte Aufgabe von der Krone des Hiero hinaus, deren Auflösung den Ar-

chimedes mit Recht in eine Entzückung versezte, die sein Genie verrieth. Unerachtet sie der in diesem § vorgelegten und aufgelösten ähnlich ist; will ich sie, ihrer Celebrität wegen, besonders entwickeln.

Durch Räsonnement. Wäre die ganze Masse von Gold gewesen, so würden die 459 Unzen außer dem Wasser, $\frac{18}{19}$ von 459, das ist 434 $\frac{16}{19}$ Unzen im Wasser gewogen haben. Sie wägen aber im Wasser nur 426 Unzen; mithin $8\frac{16}{19}$ Unzen weniger; es ist also nicht die ganze Masse Gold. Jener Unterschied rührt nun daher, daß einige Unzen der Masse außer dem Wasser, statt $\frac{18}{19}$, nur $\frac{10}{11}$ Unzen, folglich $\frac{8}{209}$ weniger im Wasser wägen. Man findet daher, wie viel Unzen Silber in der Masse enthalten sind, wenn man untersucht, wie vielmal die Differenz $\frac{8}{209}$ genommen werden muß, um $8\frac{16}{19}$ zu machen, das ist, wenn man $8\frac{16}{19}$ durch $\frac{8}{209}$, oder $1\frac{2}{19}$ durch $\frac{1}{209}$ dividirt. Der Quotient $209 \times 1\frac{2}{19}$, oder 231, zeigt an: daß die Masse 231 Unzen Silber, folglich 228 Unzen Gold enthalte.

Unzen Gold außer dem Wasser		Gewicht des Goldes im Wasser	
Wasser	228		216 Unzen.
. . Silber	231	Silbers	210
		Totalgew. im Wasser	426.

Algebraisch.

Ben. Unzen Gold außer dem Wasser x
. . Silber . . . . $459 - x$
Unzen Gold im Wasser . . . . . . $\frac{18}{19}x$
. . Silber . . . . . $\frac{10}{11}459 - \frac{10}{11}x$
Totalgewicht im Wasser . . $\frac{10}{11}459 + \frac{8}{209}x$.

Bed. $\frac{10}{11}459 + \frac{8}{209}x = 426.$

Red. $\frac{4590}{11} + \frac{8}{209}x = \frac{4686}{11}$

$$4590 + \frac{8}{19}x = 4686$$
$$\frac{8}{19}x = 96$$
$$\frac{1}{19}x = 12.$$

Aufl.

Aufl. $1x = 228$ Unzen Gold außer dem Wasser

$459 - x = 231$ . . . Silber

$\frac{18}{19}x = 216$ Unzen Gold im Wasser

$\frac{10}{11} \cdot 459 - \frac{10}{11}x = 210$ . . . Silber

$\frac{10}{11} \times 459 + \frac{8}{209}x = 426$, Gewicht der Masse im Wasser.

Probe. $426 = 426$.

Allgemein. Betrachtet man die Aufgaben dieses § unter einem allgemeinen Gesichtspunct; so ergiebt sich, daß sie sich auf die folgende reduciren: Eine gegebene Zahl in zwey Theile theilen, die mit gegebenen Zahlen multiplicirt eine gegebene Summe machen.

Die gegebene Zahl a sey in zwey Theile zu theilen, deren Producte durch die gegebene Zahlen m, n zusammen der gegebenen Zahl s gleich seyen.

Ben. Gesuchte Theile . . . x und $a - x$.
Producte . . . . mx; $na - nx$.

Bed. $na + mx - nx = s$.

1. Fall. Es sey $m = n$; so muß $na = s$ seyn: und folglich ist die Aufgabe unmöglich, oder unbestimmt, je nachdem na und s ungleich oder gleich sind. Nämlich, die Summe der Producte der Theile jeder Zahl durch eine nämliche Zahl ist dem Product der ersten Zahl durch die zweyte gleich.

2. Fall. Es sey $m > n$; 3. Fall. Es sey $m < n$.

Red. $mx - nx = s - na$ $nx - mx = na - s$

$x(m - n) = s - na$ $x(n - m) = na - s$

Aufl. $x = \frac{s - na}{m - n}$ | $x = \frac{na - s}{n - m}$

$a - x = \frac{ma - s}{m - n}$ | $a - x = \frac{s - ma}{n - m}$

$mx = \frac{ms - mna}{m - n}$ | $mx = \frac{mna - ms}{n - m}$

$na - nx = \frac{mna - ns}{m - n}$ | $na - nx = \frac{ns - mna}{n - m}$

$na + mx - nx = \frac{ms - ns}{m - n} = s.$ | $na - nx + mx = \frac{ns - ms}{n - m} = s.$

Die auf die Voraussezung $m < n$ sich beziehende Formeln unterscheiden sich von den auf die Voraussezung $m > n$ sich beziehende nur durch die Zeichen der beyden Glieder der Brüche, welche einerley Größen ausdrücken.

1. Anmerkung. Wendet man die Formeln des zweyten und dritten Falls auf die Voraussezung des ersten an: so erhält man $x = \frac{s - na}{0} = \frac{na - s}{0}$; welches Unmöglichkeit anzeigt, wenn nicht $s = na$ ist; in welchem Fall sich das Zeichen der Unbestimmtheit $\frac{0}{0}$ ergiebt, nämlich jede zwey Theile der Zahl a haben alsdenn die verlangte Beschaffenheit.

2. Anmerkung. Ist m größer als n, und zugleich $\begin{cases} s > na \\ ma > s \end{cases}$; so ist die Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage aufgelöst. Hat man aber $\begin{cases} s > na \\ s > ma \end{cases}$; so ändert der zweyte Theil sein Zeichen, und die vorgelegte Aufgabe verwandelt sich in die folgende: die Zahl a ist der Ueberschuß des ersten Theils über den zweyten; und die Größe s ist der Ueberschuß des ersten Products über das zweyte.

Ist m kleiner als n, und zugleich $\begin{cases} na > s \\ ma < s \end{cases}$; so ist die Aufgabe wieder nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aus-

sage aufgelöst. Hat man aber zugleich $\begin{cases} na > s \\ ma > s \end{cases}$: so ändert sich ebenfalls das Zeichen des zweyten Theils: die Größe a wird der Ueberschuß des ersten Theils über den zweyten; und die Größe s ist der Ueberschuß des ersten Products über das zweyte.

Die Aufgaben aus der VermischungsRechnung, die so oft bey den auf die Bearbeitung der Metalle sich beziehenden Künsten vorkommen, gehören zu der Aufgabe dieses §, wenn sie bestimmt sind, und dabey nur von zwey Metallen die Frage ist.

Man ist übereingekommen, jede Masse Goldes in 24 gleiche Theile zu theilen, wovon jeder ein Karat heißt. Ist eine gegebene Masse reines Gold; so sagt man, dieses Gold sey zu 24 Karat. Sind von den 24 Theilen der Masse nur 23 reines Gold, und ist ein Theil von einem andern Metall, von Silber oder Kupfer: so sagt man, es sey Gold zu 23 Karat. Ueberhaupt wird bey Gold der Gehalt einer Mischung nach der Anzahl der darinn enthaltenen Theile feinen Goldes geschäzt, indem man die Mischung in 24 gleiche Theile theilt, oder getheilt gedenkt. Und da das Gold in Vergleichung mit Silber, und noch vielmehr in Vergleichung mit andern Metallen, so kostbar ist, daß man dieser ihren Werth in den daraus bestehenden Mischungen in Vergleichung mit dem Werth des Golds, wenn dieses den Haupttheil derselben ausmacht, als unbedeutend ansehen kann; so schäzt man die Mischung in diesem Fall nur nach der Menge des Goldes, das sie enthält.

Aufgabe. Man hat ein Stük Gold zu 23 Karat, und ein anderes zu 18 Karat. Wieviel muß man von jedem dieser Stücke nehmen, um ein 30 Mark schweres Stük zu 22 Karat zu bekommen?

Ich will die Uebereinstimmung dieser Aufgabe mit der in diesem § aufgelösten zeigen. $\frac{23}{24}$ des ersten Stüks sind feines Gold; ferner sind $\frac{18}{24}$ des andern Stüks feines Gold; und $\frac{22}{24}$ des durch ihre Mischung herausgebrachten Stüks sol-

len feines Gold seyn. Folglich muß die Summe der Producte des von dem ersten Stük genommenen Gewichts durch $\frac{23}{24}$, und des von dem andern Stük genommenen Gewichts durch $\frac{18}{24}$, gleich seyn dem Product des Gewichts des aus der Mischung entstehenden Stuks durch $\frac{22}{24}$: Oder, wenn man den Divisor 24 wegläßt, die Summe der respectiven Producte der zwey ersten Gewichte durch die Zahlen 23 und 18, muß gleich seyn dem Product des lezten Gewichts durch 22. Die vorgelegte Aufgabe ist also mit der folgenden einerley: Die gegebene Zahl 30 in zwey Theile theilen, so daß die Summe ihrer Producte durch die gegebene Zahlen 23 und 18 dem Product der gegebenen Zahl 30 durch 22 gleich sey.

Durch den Umstand, daß die zu theilende Zahl 30, als Factor in der gegebenen Summe der Producte enthalten ist, wird die Rechnung ein wenig vereinfacht. Man hat nämlich in den vorhergehenden Formeln

$$a = 30$$
$$m = 23$$
$$n = 18$$
$$s = 30 \times 22.$$

Hieraus: $x = \frac{30 \times 22 - 30 \times 18}{23 - 18} = 30 \times \frac{4}{5} = 24$

$$a - x = \frac{30 \times 23 - 30 \times 22}{23 - 18} = 30 \times \frac{1}{5} = 6.$$

Man muß also 24 Unzen vom ersten Stük, und 6 Unzen vom zweyten nehmen.

Wirklich betragen die 24 Unzen des ersten Stüks, 23 Unzen reines Gold; und die 6 Unzen des zweyten $4\frac{1}{2}$ Unzen reines Gold: sie halten also zusammen $27\frac{1}{2}$ Unzen reines Gold. 30 Unzen Gold zu 22 Karat, enthalten aber auch $30 \times \frac{22}{24} = 5 \times \frac{11}{2} = 27\frac{1}{2}$ Unzen reines Gold.

Wenn allgemein m und n den Gehalt der gegebenen Stücke, und p den angegebenen Gehalt des gesuchten Stüks bezeichnen; so erhält man

$$x = \frac{ap - na}{m - n} = a \times \frac{p - n}{m - n}$$

$$a - x = \frac{am - ap}{m - n} = a \times \frac{m - p}{m - n}.$$

Eben so wird man bey Mischungen von Silber verfahren: wenn man weiß, daß man übereingekommen ist, ein Stük Silber in 16 gleiche Theile, die man Loth nennt, zu theilen; so daß man sagt, ein Stük Silber sey z. B. zehnlöthig, wenn die $\frac{10}{16}$ seines Gewichts feines Silber sind.

Eben dieses Verfahren wird man anwenden, um ein gegebenes Stük durch Zusaz auf einen niedrigern Gehalt zu bringen. Man wird nämlich in den vorhergehenden Formeln $n = 0$ sezen; woraus folgt

$$x = a \times \frac{p}{m}$$

$$a - x = a \times \frac{m - p}{m}.$$

§. 25.

Aufgabe. Eine Gesellschaft von 36 Personen, Männer und Frauen, macht eine Lustparthie. Jeder Mann bezahlt 24 Gulden, und jede Frau 20 Gulden. Die ganze Auslage der Männer übersteigt die der Frauen um 116 Gulden. Wieviel waren es Männer, und wieviel Frauen?

Durch Räsonnement. Hätte die Gesellschaft nur aus Männern bestanden; so würde die Auslage 864 Gulden gemacht haben; und diß wäre der Ueberschuß der Auslage der Männer über die Frauen gewesen (welche also nichts bezahlt hätten). Dieser Ueberschuß ist aber nur 116 Gulden. Wir haben ihn also um 748 Gulden größer herausgebracht, als er wirklich ist; welches daher rührt, daß einige Frauen an die Stelle einiger Männer zu sezen sind. Nun vermindert sich durch jede, statt eines Manns anzunehmende Frau, die ganze Auslage der Männer um 24 Gulden; die der Frauen hingegen vermehrt sich um 20 Gulden: folg-

lich vermindert sich der Ueberschuß der Auslage der Männer über die der Frauen um 44 Gulden. Wir werden also finden, wieviel Frauen dabey gewesen, wenn wir suchen, wie vielmal man 44 nehmen muß, um 748 zu bekommen; das ist, wenn wir 748 durch 44 dividiren. Der Quotient 17 zeigt an, daß es 17 Frauen waren.

Anzahl der Frauen 17 Ganze Auslage der Frauen 340
. . . Männer 19 . . . . . . Männer 456
Ueberschuß der lezten Auslage
über die erste . . . 116.

Algebraisch.

Ben. Anzahl der Männer x
. . . Frauen . . . . $36-x$
Auslage der Männer . . . . $24x$
. . . . Frauen . . . . $720-20x$
Unterschied der Auslagen . . . $44x-720$.

Bed. $44x-720=116$.

Red. $44x=836$ (beyderseits 720 addirt)

Aufl. $1x=19$ Anzahl der Männer
$36-x=17$ . . . Frauen
$24x=456$ Auslage der Männer
$720-20x=340$ . . . Frauen
$44x-720=116$ Unterschied der Auslagen.

Probe. $116=116$.

Andere Beyspiele. Einer hat 24000 Gulden; wovon er einen Theil zu 7 pro Cent, und den andern zu 5 pro Cent anlegt. Von dem ersten Capital zieht er 600 Gulden Jahrszins mehr als aus dem andern.

Einer hat 30000 Gulden; wovon er einen Theil zu 7 pro Cent, und den andern zu 4 pro Cent anlegt.

Das zweyte Capital trägt jährlich 210 Gulden Zins mehr als das erste.

Es dingt jemand einen Arbeiter auf 40 Tage, unter folgenden Bedingungen. Für jeden Tag, den er arbeitet, soll er außer der Kost 27 Kreuzer bekommen; für jeden Tag aber, den er müßig geht, sollen ihm 15 Kreuzer abgezogen werden. Am Ende der 40 Tage ist man ihm 408 Kreuzer schuldig. Wieviel Tage hat er gearbeitet; und wieviel ist er müßig gegangen?

Allgemein. Betrachtet man die vorhergehende Aufgaben unter einem allgemeinen Gesichtspunkt; so findet man, daß sie darauf hinauslauffen: eine gegebene Zahl in zwey Theile so zu theilen, daß die Differenz der Producte derselben durch gegebene Zahlen, der Größe nach gegeben sey.

Die gegebene Zahl a sey in zwey Theile so zu theilen, daß die Differenz der Producte derselben durch die gegebene Zahlen m und n der gegebenen Zahl d gleich sey.

Ben.	Erster Theil	x
	Zweyter Theil	$a-x$
	Erstes Product	mx
	Zweytes Product	$na-nx$
	Differenz der Producte . . .	$mx+nx-na$.

Bed. $mx+nx-na=d$.

Red. $mx+nx=na+d$.

Aufl. $x=\frac{na+d}{m+n}$, erster Theil

$a-x=\frac{ma-d}{m+n}$, zweyter Theil

$mx=\frac{mna+md}{m+n}$, erstes Product

$na-nx=\frac{mna-nd}{m+n}$, zweytes Product

$mx+nx-na=\frac{(m+n)d}{m+n}$, Differenz der Producte.

Probe. $\frac{(m+n)d}{m+n}=d$.

Anmerkung. Ist $ma > d$; so ist die Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage aufgelöst.

Ist aber $ma < d$; so verändern der zweyte Theil und sein Product durch die gegebene Zahl n ihre Zeichen. Alsdenn ist die Größe a der Ueberschuß des ersten Theils über den zweyten; und die Differenz d ist die Summe der zwey Producte.

§. 26.

Aufgabe. Ein Gärtner will Bäume in Gestalt eines vollen Quadrats pflanzen; und findet, daß ihm acht Bäume übrig bleiben. Aber um eine Reihe mehr, und in jede Reihe einen Baum mehr zu sezen, fehlen ihm 13 Bäume.

Wieviel hat er Bäume? wieviel Reihen, und wieviel Bäume in jeder Reihe wollte er jedesmal sezen?

Durch Räsonnement. Zeichnet man sich mit Punkten die angegebene quadratförmige Stellungen; indem man nach und nach immer eine Reihe weiter, und in jede Reihe einen Punkt (Baum) weiter sezt: so sieht man, daß die zu jeder folgenden mehr als zu der vorhergehenden Anordnung erforderte Bäume einen Winkelhaken bilden, der aus der doppelten Anzahl der Bäume jeder Reihe der vorhergehenden Anordnung, und noch einem Baum weiter besteht. Diese Winkelhaken wachsen nämlich nach und nach wie die ungeraden Zahlen 3, 5, 7, 9, 11...... Nun macht die Anzahl der nach der ersten Anordnung übrig gebliebenen Bäume mit der Anzahl der zur Ausführung der zweyten Anordnung fehlenden Bäume zusammen einen Winkelhaken, welcher $8 + 13 = 21$ Bäume enthält. Die doppelte Anzahl der Reihen der ersten Anordnung ist also 20; und die Anzahl der Reihen derselben ist die Hälfte von 20, mithin 10.

Anzahl der Reihen der ersten Anordnung 10

Anzahl der Bäume in jeder Reihe 10

Bäume in der ersten Anordnung . . .	$10 \times 10 = 100$
Bäume des Gärtners	$100+8=108$
Anzahl der Reihen der zweyten Anordnung . . .	11
Anzahl der Bäume in jeder Reihe	11
Bäume in der zweyten Anordnung . .	$11 \times 11=121$
Bäume des Gärtners	$121-13=108$.

Anmerkung. In diesem Beyspiel mußte man die Zahlen 10 und 11 durch sich selbst multipliciren, wodurch man die Producte 100 und 121 erhielte; weil die Anzahl der gesezten Bäume gefunden wird, indem man die Anzahl der Bäume jeder Reihe durch die Anzahl der Reihen multiplicirt. Das Product der Multiplication einer Zahl mit sich selbst heißt ihr Quadrat. Ist die Zahl allgemein n: so wird ihr Quadrat $n \times n$ oder nn auch durch n^2, bezeichnet; wodurch angedeutet wird, daß n zweymal als Factor genommen werde.

Algebraisch.

		Erste Anordnung.	Zweyte Anordnung.
Ben.	Bäume in jeder Reihe	x	$x+1$
	Anzahl der Reihen	x	$x+1$
	Gepflanzte Bäume	xx	$xx+2x+1$
	Bäume des Gärtners	$xx+8$	$xx+2x-12$.

Bed. $xx+8=xx+2x-12$.

Red. $8=2x-12$ (beyderseits xx abgezogen)

$20=2x$ (beyderseits 12 addirt)

$10=x$ (beyderseits durch 2 dividirt).

Aufl.

Erste Anordnung.		Zweyte Anordnung.
$x=10$	Bäume in jeder Reihe	$x+1=11$
$x=10$	Anzahl der Reihen	$x+1=11$
$xx=100$	Gepflanzte Bäume	$xx+2x+1=121$
$xx+8=108$	Bäume des Gärtners	$xx+2x-12=108$.

Probe. $108=108$.

Beyspiele von Multiplicationen.

1.) $x+1$ Multiplicandus
$x+1$ Multiplicator
$xx+x$ Product durch x
$x+1$ Prod. durch 1
$xx+2x+1$ Totalproduct.

2.) $x+a$ Multiplicandus
$x+a$ Multiplicator
$xx+ax$ Product durch x
$ax+aa$ Product durch a
$xx+2ax+aa$ Totalproduct.

3.) $x+a$ Multiplicandus
$x+b$ Multiplicator
$xx+ax$ Product durch x
$bx+ab$ Prod. durch b
$xx+x(a+b)+ab$ Totalprod.

4.) $x-a$ Multiplicandus
$x+b$ Multiplicator
$xx-ax$ Product durch x
$bx-ab$ Prod. durch b
$xx-x(a-b)-ab$ Totalprod.

5.) $x+a$ Multiplicandus
$x-b$ Multiplicator
$xx+ax$ Prod. durch x
$bx+ab$ abzuziehendes Prod. durch b
$xx+x(a-b)-ab$ Totalprod.

$b=a$ gesezt in n° 4 und 5; so wird $(x+a)(x-a)=xx-aa$: das heißt: das Product der Summe zweyer Größen durch ihre Differenz ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

6.) $x-a$ Multiplicandus
$x-a$ Multiplicator
$xx-ax$ Product durch x
$ax-aa$ abzuziehendes Prod. durch a
$xx-2ax+aa$ Totalprod.

7.) $x-a$ Multiplicandus
$x-b$ Multiplicator
$xx-ax$ Product durch x
$bx-ab$ abzuziehendes Prod. durch b
$xx-x(a+b)+ab$ Totalprod.

Anmerkung. Das zweyte Beyspiel, welches das Quadrat von $x+a$ enthält, lehrt: daß das Quadrat einer aus zwey Theilen bestehenden Größe aus der Summe Quadrate dieser Theile, und aus dem doppelten Product derselben zusammen gesezt ist.

Und aus dem 6ten Beyspiel, welches das Quadrat von $x-a$ enthält, ersieht man: daß das Quadrat der Diffe-

renz zweyer Grössen dem Ueberschuß der Summe ihrer Quadraten über ihr doppeltes Product gleich ist.

§. 27.

Aufgabe. Die Länge eines Rectangels ist das doppelte seiner Breite. Sezt man jeder derselben einen Schuh zu; so wird sein Flächeninhalt um 37 Quadratschuh vermehrt.

Wie lang sind die Seiten dieses Rectangels? *)

Durch Räsonnement. Der Zuwachs dieses Rectangels kann in zwey Rectangel, deren jedes einen Schuh Breite, und zur Länge die Seiten des ersten Rectangels hat, und in ein Quadrat, dessen Fläche einen Quadratschuh beträgt, zerlegt werden. Die Summe jener zwey Rectangel macht also 36 Quadratschuh. Da nun ihre Breite ein Schuh ist; so muß die Summe ihrer Längen 36 Schuh seyn. Die Länge des ersten Rectangels ist aber das doppelte seiner Breite; mithin die Summe seiner zwey Seiten, das dreyfache seiner Breite. Folglich ist die Breite des ersten Rectangels ein drittel von 36, das ist 12; und seine Länge 24.

---

*) Es ist aus den ersten Anfangsgründen der Geometrie bekannt: daß man, um den Flächeninhalt eines Rectangels, dessen Seiten in Zahlen angegeben sind, zu finden, diese Zahlen in einander multipliciren muß. Das Product zeigt an, wieviel das Rectangel solcher Quadrate enthält, deren Seite das Maaß ist, in welchem die Seiten des Rcetangels angegeben sind.

So läßt sich ein Rectangel, welches einen Schuh breit und acht Schuh lang ist, in 8 Quadratschuh zerfällen, oder es hält 8 Quadratschuh. Und ist ein Rectangel 5 Schuh breit und 8 Schuh lang: so läßt es sich in 5 Streifen zerlegen, deren jeder 1 Schuh breit und 8 Schuh lang ist; oder in 5 Streifen, deren jeder 8 Quadratschuh hält. Es enthält also 5mal 8, oder 40 Quadratschuh.

Erstes Rectangel.		Zweytes Rectangel.
Breite . . .	12	13
Länge . . .	24	25
Flächeninhalt . . .	288	325.

Unterschied ihres Flächeninhalts . . . 37.

Algebraisch.

Erstes Rectangel. Zweytes Rectangel.

Ben. Breite . . x . . . x + 1

Länge . . 2x . . . 2x + 1

Flächeninhalt 2xx 2xx + 2x (Product durch 2x)

x + 1 (Prod. durch 1)

2xx + 3x + 1 Totalproduct.

Unterschied ihres Flächeninhalts . . . 3x + 1.

Bed. $3x + 1 = 37$.

Red. $3x = 36$ (beyderseits 1 abgezogen)

$1x = 12$ (beyderseits durch 3 dividirt)

Aufl. Erstes Rectangel. Zweytes Rectangel.

$x = 12$ Breite $x + 1 = 13$ Breite

$2x = 24$ Länge $2x + 1 = 25$ Länge

$2xx = 288$ Flächeninhalt. $2xx + 3x + 1 = 325$ Flächeninhalt.

$3x + 1 = 37$ Unterschied ihres Flächeninhalts.

Probe. $37 = 37$.

Andere Beyspiele. Die Länge eines Rectangels ist das dreyfache seiner Breite. Sezt man der Breite 2 Schuh, und der Länge 3 Schuh zu; so wird der Flächeninhalt um 114 Quadratschuh vergrößert.

Die Breite eines Rectangels ist drey Viertel seiner Länge. Sezt man seiner Breite 2 Schuh, und seiner Län-

ge 4 Schuh zu; so wird der Flächeninhalt um 68 Quadratschuh vergrößert.

Allgemein. Die Länge sey das mfache der Breite. Sezt man der Breite a Schuh, und der Länge b Schuh zu; so wird der Flächeninhalt um die gegebene Zahl p von Quadratschuhen vergrößert.

Ben. Erstes Rectangel. Zweytes Rectangel.

	Erstes Rectangel	Zweytes Rectangel
Breite	x	$x+a$
Länge	mx	$mx+b$
Flächeninhalt	mxx	$mxx+max$ (Prod. durch x)
		$bx+ab$ (Prod. durch b)
		$mxx+x(ma+b)+ab$ Totalprod.

Unterschied ihres Flächeninhalts . . . $x(ma+b)+ab$.

Bed. $x(ma+b)+ab=p$.

Red. $x(ma+b)=p-ab$ (beyderseits durch ab abgezog.)

$$x=\frac{p-ab}{ma+b} \text{ (beyderseits durch ma+b divid.)}$$

	Erstes Rectangel.	Zweytes Rectangel.
Breite . . .	$x=\frac{p-ab}{ma+b}$	$x+a=\frac{p+maa}{ma+b}$
Länge	$mx=\frac{mp-mab}{ma+b}$	$mx+b=\frac{mp+bb}{ma+b}$
Flächeninhalt	$mxx=\frac{mpp-2mabp+maabb}{(ma+b)^2}$	$mxx+x(ma+b)+ab=\frac{mpp+mmaap+bbp+maabb}{(ma+b)^2}$

Unterschied ihres Flächeninhalts . . $\frac{mmaap+2mabp+bbp}{(ma+b)^2}$

$$=\frac{p(mmaa+2mab+bb)}{(ma+b)^2}=p\times\frac{(ma+b)^2}{(ma+b)^2}=p.$$

Anmerkung. Ob sich gleich die Fassung der Aufgabe auf Verlängerung der beyden Seiten des Rectangels bezieht; so lassen sich doch die gefundene Formeln ebenfalls

sowohl auf den Fall, wenn die eine Seite wächst, und die andere abnimmt, als auf den Fall, wenn beyde Seiten abnehmen, anwenden; wie aus folgendem erhellt.

1.) a bedeute Zunahme, und b Abnahme; so erhält man:

	für das erste Rectangel	für das zweyte Rectangel
Breite . . .	$\frac{p+ab}{ma-b}$	$\frac{p+maa}{ma-b}$
Länge . . .	$m \times \frac{p+ab}{ma-b}$	$\frac{mp+bb}{ma-b}$

Wenn in diesem Fall $ma=b$: so ist die Aufgabe unmöglich, wofern nicht zu gleicher Zeit $p+ab=0$, oder $p=-ab$ ist; folglich p, statt eine Zunahme, eine Abnahme bedeutet.

Ist $ma<b$: so wird die Breite $-\frac{p+ab}{b\ ma}$; welches anzeigt, daß p eine Abnahme bedeute.

Die Seiten des zweyten Rectangels sind nämlich $\begin{cases} x+a \\ mx-b \end{cases}$, und sein Flächeninhalt ist $mxx-x(b-ma)-ab$. Dieser ist also nun kleiner als der des ersten: und die Veränderung eine Abnahme, nämlich $x(b-ma)+ab$. Wird diese durch p bezeichnet: so erhält man $x=\frac{p-ab}{b-ma}$; mit der vorigen Formel übereinstimmend, wenn man das Zeichen von p darinn ändert.

2.) a bedeute Abnahme, und b Zunahme.

So wird die Breite des ersten Rectangels $\frac{p+ab}{b-ma}$. Für $b=ma$ ist diese Größe unmöglich; wenn man nicht das Zeichen von p in das einer Abnahme ändert, und alsdenn $ab=p$ hat. Wenn nämlich a Abnahme, und b Zunahme bedeutet; so wird der zweyte Flächeninhalt $mxx+x(b-ma)-ab$. Es ist also, wenn $b=ma$, um die Größe ab kleiner als das erste; und die Aufgabe

ist unbestimmt. Ist $b > ma$: so kann nach Willkühr der zweyte Flächeninhalt größer oder kleiner als der erste angenommen werden; ist aber $b < ma$, so ist der zweyte Flächeninhalt nothwendig kleiner als der erste.

3.) a und b bedeuten beyde Abnahme. So wird die Formel für die Breite des ersten Viertangels $\frac{p-ab}{-ma-b}$ oder $\frac{ab-p}{ma+b}$. In diesem Fall wird der zweyte Flächeninhalt $mxx - x(ma+b)+ab$. Soll er nun größer seyn als der erste; so ist die Zunahme $ab - x(ma+b)$: dies gleich p gesezt, giebt $ab - x(ma+b) = p$; woraus folgt $x = \frac{ab-p}{ma+b}$, mit dem vorhergehenden übereinstimmend. Soll hingegen der zweyte Flächeninhalt kleiner seyn als der erste: so ist die Abnahme $x(ma+b) - ab$; und nennt man diese p, so erhält man $x = \frac{ab+p}{ma+b}$.

§. 28.

Aufgabe. Die Summe s zweyer Zahlen, und die Differenz q ihrer Quadrate sind gegeben: welches sind die Zahlen?

Durch Räsonnement. Das Product von $a-b$ und $a+b$, der Differenz und der Summe zweyer Größen a, b, ist $aa - bb$, also der Differenz der Quadrate der zwey Größen gleich: wie schon oben (§. 26.) bemerkt worden ist. Kennt man also die Summe zweyer Zahlen und die Differenz ihrer Quadrate; so findet man die Differenz der zwey Zahlen, wenn man die gegebene Differenz der Quadrate durch die Summe der zwey Zahlen dividirt. Diese Differenz ist also $\frac{q}{s}$. Und nun ist die vorgelegte Aufgabe auf die folgende reducirt: zwey Zahlen finden, deren Summe s, und deren Differenz $\frac{q}{s}$ ist. Die zwey gesuchte Zahlen sind also $\frac{1}{2}s + \frac{q}{2s}$ und $\frac{1}{2}s - \frac{q}{2s}$ (§. 9.)

Wirklich ist $(\frac{1}{2}s+\frac{q}{2s})^2=\frac{1}{4}ss+\frac{1}{2}q+\frac{qq}{4ss}$.

$(\frac{1}{2}s-\frac{q}{2s})^2=\frac{1}{4}ss-\frac{1}{2}q+\frac{qq}{4ss}$.

$(\frac{1}{2}s+\frac{q}{2s})^2-(\frac{1}{2}s-\frac{q}{2s})^2=q$.

Algebraisch. Ben. Größere Zahl . . x

Kleinere Zahl . . $s-x$

Quadrate. . . . $\begin{cases} xx \\ ss-2sx+xx \end{cases}$

Unterschied . . . $2sx-ss$.

Bed. $2sx-ss=q$.

Red. $2sx=ss+q$.

Aufl. $x=\frac{1}{2}s+\frac{q}{2s}$

$s-x=\frac{1}{2}s-\frac{q}{2s}$

$xx=\frac{1}{4}ss+\frac{1}{2}q+\frac{qq}{4ss}$

$(s-x)^2=\frac{1}{4}ss-\frac{1}{2}q+\frac{qq}{4ss}$

$2sx-xx=q$.

Probe. $q=q$.

Anmerkung. Wenn $\frac{1}{2}s>\frac{q}{2s}$ oder $ss>q$, so entsprechen die bisherige Formeln der Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage. Ist aber $ss<q$; so verändert die zweyte Zahl $s-x$ oder $\frac{1}{2}s-\frac{q}{2s}$ ihr Zeichen: und stellt man sie unter der Form $\frac{q}{2s}-\frac{1}{2}s$ dar; so entspricht sie der Aufgabe, worinn s die Differenz, nicht die Summe, der zwey Zahlen ist, welche q zur Differenz ihrer Quadrate haben.

Anhang

Anhang zu diesem Capitel,

enthaltend einige belustigende mathematische Kunststücke

§. 29.

Aufgabe. Aus einem Spiel von 32 Karten werden 3 Karten gezogen. Auf jede derselben werden soviel Karten gelegt, als erforderlich sind, damit die Anzahl derselben mit der Zahl der Augen der Karte, worauf man sie legt, 15 ausmache. Nun bleiben noch 8 Karten übrig. Was ist die Summe der Augen der 3 ersten Karten?

Durch Räsonnement. Da die Summe der Augen jeder der 3 ersten Karten und der Anzahl der auf sie gelegten Karten 15 ausmachen muß; so beträgt die Summe der Augen der 3 ersten Karten, und aller auf dieselbe gelegten Karten 45.

Da das Spiel aus 32 Karten besteht; und die 3 erste Karten mit den 8 übrig gebliebenen 11 machen: so ist die Anzahl der auf die 3 erste gelegten Karten 21. Die Zahl der Augen der untern Karten ist also der Ueberschuß von 45 über 21, das ist 24.

Algebraisch. Ben. Summe der Augen der 3 ersten Karten x
Anzahl der darauf gelegten Karten . . . $45-x$
Anzahl der Karten, welche die 3 Häufchen ausmachen $48-x$
da das Spiel aus 32 Karten besteht, und 8 Karten übrig bleiben; so muß die Summe der Karten in den 3 Häufchen seyn . . . . 24.

Bed. $48-x=24.$

Red. $48=24+x$ (beyderseits x addirt)
$24=x$ (beyderseits 24 abgezogen)

Aufl. $x=24$ Zahl der Augen der 3 ersten Karten
$45-x=21$ die auf die 3 erste gelegte Karten
$48-x=24$ Karten, welche die 3 Häufchen ausmachen.

Probe. $24=24$.

Andere Beyspiele. Aus einem Spiel von 32 Karten zieht man 4. Auf jede derselben legt man soviel Karten, als nöthig sind, damit die Anzahl dieser Karten samt den Augen derjenigen, auf welche man sie gelegt hat, 12 machen. Es bleiben noch 5 Karten übrig.

Desgleichen: Aus einem Spiel von 52 Karten macht man 5 Häufchen. Die Zahl der Augen jeder unten liegenden Karte, samt der Anzahl der darauf gelegten Karten, macht 16. Es bleiben 10 Karten übrig.

Allgemein. Aus einem Spiel von N Karten werden m Karten gezogen. Auf jede derselben werden soviel Karten gelegt, daß ihre Anzahl und die Zahl der Augen jeder unten liegenden Karte zusammen die Summe n ausmachen. Es bleiben r Karten übrig. Wie gros ist die Summe der Augen der ersten Karten?

Ben. Summe der Augen der m ersten Karten . . . x
Anzahl der darauf gelegten Karten . . . $mn-x$
Anzahl der Karten in allen Häufchen $mn+m-x$
Anzahl aller Karten . . . $mn+m+r-x$

Bed. $mn+m+r-x=N$.

Red. u. Aufl. $x=mn+m+r-N$, Summe der Augen in den m ersten Karten.
$mn-x=N-m-r$ Anzahl der darauf gelegten Karten.
$mn+m-x=N-r$ Anzahl der Karten in allen Häufchen.
$mn+m+r-x=N$ Anzahl aller Karten.

§. 30.

Aufgabe. Eine Person A sagt zu einer andern B; sie soll sich eine Zahl denken; dieselbe verdoppeln; 8 zu diesem doppelten addiren; und von dieser Summe die Hälfte nehmen. B sagt alsdenn zu A, daß sie nun 10 habe. Was hat A zu thun, um die Zahl zu finden, welche B sich gedacht hat?

Durch Räsonnement. Hätte die Person A die andere B nichts addiren lassen: so würden sich die zwey Operationen des verdoppelns der gedachten Zahl, und des halbirens dieses doppelten, wechselseitig aufgehoben haben; und B hätte nur die anfänglich gedachte Zahl übrig behalten. Da nun B zu dem doppelten der gedachten Zahl 8 addirt; und die Hälfte der Summe genommen hat: so hat sie nach dieser Operation die Summe der gedachten Zahl und der Hälfte von 8 oder 4. Diese lezte Summe aber ist 10. Die anfänglich gedachte Zahl ist also um 4 kleiner als 10. Folglich 6.

Gedachte Zahl	6
verdoppelt	12
das doppelte um 8 vermehrt . . .	20
Hälfte dieser Summe	10.

Algebraisch. Bey.

Gedachte Zahl	x
verdoppelt	$2x$
das doppelte um 8 vermehrt	$2x+8$
Hälfte dieser Summe . . .	$x+4$.

Bed. $x+4=10$.

Red. u. Aufl.	$x = 6$	gedachte Zahl
	$2x = 12$	gedachte Zahl verdoppelt
	$2x+8 = 20$	das doppelte um 8 vermehrt
	$1x+4 = 10$	Hälfte dieser Summe.

Probe. $10 = 10$.

Andere Beyspiele. B verdreyfacht die Zahl, welche sie gedacht hat; addirt zu diesem dreyfachen 15; nimmt ein drittel dieser Summe; und sagt, sie haben nun 12.

B vervierfacht die Zahl, welche sie gedacht hat; addirt 12 zu diesem 4fachen; nimmt ein Viertel von der Summe; und sagt, sie habe nun 13.

Allgemein. Man multiplicirt die gedachte Zahl durch m; addirt a zu diesem Product; nimmt $\frac{1}{m}$ von der Summe; und sagt, man habe nun die Zahl fünf.

§. 31.

Aufgabe. Der Schlafraum eines Klosters besteht aus 8 Zellen, deren äusserer Umfang ein Quadrat bildet. In jeder Zelle wohnen 3 Nonnen. Nun gehen 4 von ihnen weg. Die übrige vertheilen sich so, daß die Anzahl der Nonnen in jeder Reihe, die nämliche wie vorher bleibt. Wie haben sie sich vertheilt?

Arithmetisch. (Fig. 3.) Es waren anfänglich 24 Nonnen. Nachdem 4 von ihnen weggegangen sind, so blieben noch 20. Dis ist die Anzahl der in den 4 mittleren Zellen, und in den 4 Ekzellen zusammen befindlichen Nonnen. Die Anzahl der in einer Ekzelle und in einer mittleren Zelle befindlichen ist also ein Viertel von 20, oder 5. Die Anzahl der in 2 Ekzellen und in einer mittleren Zelle befindlichen ist aber 9. Folglich ist die Anzahl der in einer Ekzelle befindlichen, der Ueberschuß von 9 über 5, das heißt 4; und in jeder mittleren Zelle ist eine Nonne.

Algebraisch.

Ben.	Anzahl der Nonnen in einer Ekzelle . . .	x
	. . . . zwey Ekzellen . . .	$2x$
	. . . . in einer mittleren Zelle . .	$9-2x$
	. . . . in den 4 Ekzellen	$4x$
	. . . . mittleren . . .	$36-8x$
	. . . . in den 8 Zellen . . .	$36-4x.$

Bed. $36-4x=20$.

Red. $36=20+4x$, beyderseits 4x addirt.

$16=\quad 4x$, beyderseits 20 abgezogen.

$4=\quad 1x$, wie vorhin.

Aufl. $x=4$, Nonnen in einer Ekzelle

$2x=8$ . . . zwey Ekzellen

$9-2x=1$ . . . einer mittleren Zelle

$4x=16$ . . . den 4 Ekzellen

$36-8x=4$ . . . . . . mittleren Zellen

$36-4x=20$ . . . den 8 Zellen.

Andere Beyspiele Die Anzahl der Personen, anstatt sich um 4 zu vermindern, vermehrt sich um 4, oder um 8.

Die Anzahl der anfänglich in jeder Zelle befindlichen Personen ist 5. Die Anzahl der Personen vermindert sich um 4, oder 8; oder sie vermehrt sich um 4, 8, 12, 16.

Allgemein. Die Anzahl der in jeder Zelle anfänglich befindlichen Nonnen ist m. Die Anzahl derjenigen, die weggehen, ist 4n; und die Anzahl der Nonnen in jeder Reihe bleibt 3m.

Algebraisch.

Ben. Anzahl der Nonnen in einer Ekzelle x

in zwey Ekzellen . . . . $2x$

in einer mittleren Zelle $3m-2x$

in den 4 Ekzellen . . . $4x$

. . . mittleren Zellen $12m-8x$

in den 8 Zellen . . . $12m-4x$.

Bed. $12m-4x=8m-4n$.

Red. $12m=8m-4n+4x$

$12m+4n=8m+4x$

$4m+4n=4x$

$m+n=1x$.

Aufl. $x = m + n$ Nonnen in einer Ekzelle

$2x = 2m + 2n$ . . . zwey Ekzellen

$3m - 2x = m - 2n$ . . . einer mittleren Zelle

$4x = 4m + 4n$ . . . den 4 Ekzellen

$12m - 8x = 4m - 8n$ . . . . . mittleren Zellen

$12m - 4x = 8m - 4n$ . . . den 8 Zellen.

Probe. $8m - 4n = 8m - 4n$.

Einschränkung. Soll die Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage möglich seyn; so muß man haben $m \geqq 2n$.

Wenn die Anzahl der Nonnen sich vermehrt, statt sich zu vermindern; so muß man das Zeichen von n verändern. Man erhält nämlich

Nonnen in einer Ekzelle . . . . $m - n$

. . . . mittleren Zelle . . . $m + 2n$.

Damit nun die Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage möglich seye, so muß $m \geqq n$ seyn.

Andere Uebungsbeyspiele. In jedem von drey in gerader Linie stehenden Fächern liegen m Zahlpfenninge. Man nimmt 2n davon weg; oder legt 2n neue zu. Den Rest, oder die Summe vertheilt man so, daß in dem mittleren Fach und in jedem der Ekfächer zusammen 2m Zahlpfenninge befindlich sind.

Desgleichen: Vier Ekfächer befinden sich an den drey Spizen und in der Mitte eines (z. B. gleichseitigen) Dreyeks. In jedem derselben liegen m Zahlpfenninge. Man nimmt 2n derselben weg; oder legt 2n neue zu; so daß in dem mittleren Fach und in jedem an der Spize des Dreyeks zusammen 2m Zahlpfenninge liegen.

Fünf Fächer befinden sich an den 4 Ecken und in der Mitte eines Quadrats. In jedem liegen m Zahlpfenninge. Man nimmt 3n derselben weg; oder legt 3n neue zu; so

daß gleichviel Zahlpfenninge in dem mittleren Fach und in jedem der Ekfächer zusammen liegen.

Desgleichen für ein 5ek, 6ek, 7ek.... Man nimmt weg oder sezt zu... 4n, 5n, 6n... Zahlpfenninge.

Zweytes Capitel.

Aufgaben vom ersten Grade mit zwey oder mehr unbekannten Größen.

In dem vorhergehenden Capitel haben wir nur eine Bezeichnung unbekannter Größen angenommen; und dadurch, daß wir die Bedingungen, welche die gesuchte Größen eine durch die andere bestimmen, bey ihren Benennungen gebrauchten, uns auf ein einiges willkürliches Zeichen eingeschränkt. Ueberlegt man sorgfältig die Einrichtung der Benennungen; so kann man oft die Anzahl der unbekannten Zeichen vermindern. Es geschieht aber auch oft, daß, wenn man zu sehr auf dieser Verminderung bestehen will, das Verfahren statt einfacher zu werden, verwickelter wird, und gleich Anfangs auf gebrochene Größen oder andere zusammengesezte Ausdrüke führt, die man hätte vermeiden können. Es ist daher von Wichtigkeit, sich an die Auflösung solcher Aufgaben zu gewöhnen, welche mehrere Zeichen unbekannter Größen erfodern; oder auch selbst solche Aufgaben auf diese Art zu behandeln, bey welchen sie nicht durchaus nothwendig ist.

Diese Vermehrung unbekannter Zeichen kann nach den vielen mit einem einigen solcher Zeichen entwickelten Bey-

spielen keine Schwierigkeit haben. Man ist übereingekommen, sich hiebey (wenigstens in den meisten Fällen) der lezten Buchstaben des Alphabets, x, y, z, v, zu Bezeichnung der unbekannten Größen zu bedienen.

§. 32.

Aufgabe. Drey Ellen Tuch und fünf Ellen Zeug haben zusammen 83 Bazen; und wieder 3 Ellen von dem nämlichen Tuch und 7 Ellen desselben Zeugs 97 Bazen gekostet.

Was kostet eine Elle von jedem?

Durch Räsonnement. Die Voraussezung, daß man beydemal gleichviel Ellen Tuch gekauft habe, erleichtert die Auflösung sehr. Der Unterschied 14 der zwey Preise 97 und 83 ist der Preis des Unterschieds der von dem Zeug gekauften Ellen, nämlich der Preis von 2. Eine Elle Zeug kostet also 7 Bazen; und 5 Ellen Zeug kosten 35. 3 Ellen Tuch kosten 83 — 35 = 48 Bazen; und eine Elle Tuch kostet 16 Bazen.

Preis von 3 Ellen Tuch	48
. . . 7 . . Zeug	49
Totalpreis	97.

Das algebraische Verfahren ist nur eine symbolische Darstellung des vorigen.

Ben.	Preis einer Elle Tuch	x
	. . . . . . Zeug	y
	Preis von 3 Ellen Tuch	3x
	Preis von 5 Ellen Zeug	5y
	. . . 7	7y.

Bed. $\begin{cases} 3x + 5y = 83 \\ 3x + 7y = 97. \end{cases}$

Red. Die erste Gleichung von der zweyten abgezogen, gibt:

$2y = 14$; $y = 7$; $5y = 35$; $3x = 83 - 35 = 48$; $1x = 16$.

Aufl. $x=16$; $y=7$.

$3x=48$; $5y=35$; $7y=49$.

Probe. $\begin{cases} 48+35=83. \\ 48+49=97. \end{cases}$

Anmerkung. Es wäre leicht gewesen, sich hiebey nur eines unbekannten Zeichens, z. B. für den Preis einer Elle Zeug zu bedienen.

Ben. Preis einer Elle Zeug . . . . y

. . von 5 Ellen . . . . $5y$

. . von 7 Ellen . . . . $7y$

. . von 3 Ellen Tuch . . . . $\begin{cases} 83-5y \\ 97-7y \end{cases}$

Bed. $83-5y=97-7y$.

Red. $83+2y=97$

$2y=14$

$y=7$ wie vorhin.

Aufl. $y=7$, Preis einer Elle Zeug

$5y=35$ . . von 5 Ellen

$7y=49$ . . von 7 Ellen

$\left.\begin{matrix} 83-5y=48 \\ 97-7y=48 \end{matrix}\right\}$ Preis von 3 Ellen Tuch.

Andere Beyspiele. Man hat eine gewiße Anzahl Ellen Tuch zu 15 Bazen die Elle, und eine gewiße Anzahl Ellen Zeug zu 8 Bazen die Elle gekauft.

Ein anderes mal hat man die nämliche Anzahl Ellen Tuch zu dem nämlichen Preis, und auch wieder die nämliche Anzahl Ellen Zeug zu 6 Bazen die Elle gekauft.

Das erstemal hat man 147; und das anderemal 129 Bazen bezahlt.

Wieviel waren es Ellen Tuch, und wieviel Ellen Zeug?

Man stellt eine gewiße Anzahl Arbeiter an, nämlich 12 Männer und 8 Weiber: und bezahlt ihnen zusammen 328 Kreuzer.

Ein anderes mal stellt man 12 Männer und 11 Weiber um den nämlichen Lohn an; und bezahlt ihnen zusammen 370 Kreuzer.

Wieviel bezahlte man jedem Mann, und jedem Weib?

Allgemein. Die den bisherigen ähnliche Aufgaben führen auf Gleichungen von folgender Form:

Bed. $\begin{cases} mx+ny=p \\ mx+n'y=p'. \end{cases}$

Sind n und n' gleich; so müßen auch p und p' gleich seyn. Aus beyden Bedingungen wird also nur eine; und die Aufgabe ist unbestimmt.

Wenn von den zwey Größen n und n', die eine größer ist als die andere; so sey n die größere. Zieht man nun die Glieder der zweyten Gleichung, von denen der ersten ab; so erhält man $y(n-n')=p-p'$.

$$y=\frac{p-p'}{n-n'}$$

$$ny=\frac{np-np'}{n-n'};\ mx=p-ny=\frac{np-n'p}{n-n'}-\frac{np-np'}{n-n'}=\frac{np'-n'p}{n-n'}$$

$$n'y=\frac{n'p-n'p'}{n-n'};\ mx=p'-n'y=\frac{np'-n'p'}{n-n'}-\frac{n'p-n'p'}{n-n'}=\frac{np'-n'p}{n-n'}.$$

Aufl. $x=\frac{np'-n'p}{m(n-n')}$

$$y=\frac{p-p'}{n-n'}.$$

Probe. $\begin{cases} mx+ny=\frac{np'-n'p}{n-n'}+\frac{np-np'}{n-n'}=\frac{np-n'p}{n-n'}=p\times\frac{n-n'}{n-n'}=p. \\ mx+n'y=\frac{np'-n'p}{n-n'}+\frac{n'p-n'p'}{n-n'}=\frac{np'-n'p'}{n-n'}=p'\times\frac{n-n'}{n-n'}=p'. \end{cases}$

Anmerkung. Wendet man diese Formeln auf den Fall $n=n'$ an; so findet man $y=\frac{p-p'}{o}$: und dieser Ausdruk bedeutet Unmöglichkeit der Aufgabe; wofern nicht zugleich $p=p'$; woraus $y=\frac{o}{o}$, oder unbestimmt, folgt.

Den Fall $n'>n$ betreffend: würde man die Auflösung unmittelbar erhalten, wenn man die Glieder der ersten Gleichung von denen der zweyten abzöge; oder die Zeichen der Glieder der Brüche, welche die Werthe der unbekannten Größen angeben, änderte. So werden nun $y=\frac{p'-p}{n'-n}$; $x=\frac{n'p-np'}{m(n'-n)}$.

Unter der Voraussezung $n>n'$, ist die Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage aufgelößt, wenn $p>p'$ und $np'>n'p$ sind. Ist aber $p'>p$: so verändert sich das Zeichen des Werths von y; und die zwey Gleichungen der Bedingung verwandeln sich in diese: $mx-ny=p$; $mx-n'y=p'$. Wenn bey der nämlichen Voraussezung, daß $n>n'$ sey, $n'p>np'$ ist: so verändert sich das Zeichen des Werths von x; und die Gleichungen der Bedingung werden
$$\begin{cases} ny-mx=p \\ n'y-mx=p' \end{cases}$$

Ich will nur einige auf diese lezte Formen sich beziehende Beyspiele angeben.

Es hat jemand 15 Ellen Tuch verkauft, und dafür 120 Bazen und 10 Ellen von einem andern Tuch bekommen.

Ein anderes mal hat er für 15 Ellen des ersten Tuchs, 150 Bazen, und 8 Ellen von dem andern Tuch bekommen.

Was sind die Preise einer Elle von jeder der beyden Gattungen Tuch?

Ein Arbeiter erspart 12 Kreuzer jeden Tag, an dem er arbeitet; und verzehrt 5 Kr. jeden Tag, an dem er nicht arbeitet. Nach Verfluß einer gewissen Zeit hat er 238 Kr. gewonnen. Ein andermal hat er eben soviel Tage gearbei-

tet, und eben soviel täglich erspart, als das erstemal; auch ist er eben soviel Tage als das erstemal müssig gegangen, hat aber nun täglich 8 Kr. verzehrt: und so hat er in der nämlichen Zeit nur 208 Kr. gewonnen. Wieviel Tage hat er jedesmal gearbeitet; und wieviel nicht?

Ein Arbeiter erspart vierzehn Kreuzer jeden Tag an dem er arbeitet; und gibt 8 Kreuzer aus jeden Tag, an dem er nicht arbeitet. Nach Verlauf einiger Zeit hat er 324 Kreuzer erspart. Ein andermal hat er 3 Tage weniger, mit der nämlichen täglichen Ersparniß, gearbeitet; ist dagegen drey Tage mehr müßig gegangen; wobey er täglich zehn Kreuzer statt acht, ausgegeben: und nun hat er nur 228 Kreuzer erspart.

Wieviel Tage hat er jedesmal gearbeitet; und wieviel ist er müßig gegangen?

Anmerkung. In den bisherigen Beyspielen waren die Coefficienten einer der unbekannten Größen in den beyden Gleichungen der Bedingung gleich. Man konnte daher die Aufgabe leicht auf eine einige unbekannte Größe bringen; welches der Zwek ist, auf den man bey allen Aufgaben von zwey oder mehreren unbekannten Größen hinarbeitet. Zu diesem Ende nimmt man die erforderliche Operationen vor, damit die Coefficienten einer der unbekannten Größen gleich werden.

§. 33.

Aufgabe. Drey Maß Weizen und fünf Maß Roken haben 83 Gulden gekostet. Bey den nämlichen Preisen haben wieder sechs Maß Weizen und sieben Maß Roken 145 Gulden gekostet.

Welches waren die Preise von einem Maß Weizen, und von einem Maß Roken?

Durch Räsonnement. Da die Menge des Weizen bey dem zweyten Kauf die doppelte ist von der bey dem er=

sten Kauf: so würde man durch Verwandlung des ersten Kaufs in einen andern, wo man zweymal soviel Maß Weizen und Roken kaufte; wobey man folglich auch zweymal soviel als bey dem ersten bezahlte, bey diesem neuen Kauf eben soviel Maß Weizen erkauft haben als bey dem zweyten; und die Aufgabe wäre also auf eine von denen im vorigen § reducirt. Nämlich

6 Maß Weizen und 10 Maß Roken kosten 166 Gulden
6 Maß Weizen und 7 Maß Roken kosten 145 Gulden
folglich . . . 3 Maß Roken kosten 21 Gulden.
Hieraus: Preis von einem Maß Roken . . . 7 Gulden
. . . . Weizen . . 16 Gulden.

Dieses Verfahren ist nur Uebersezung des folgenden Algebraischen:

Bey. Preis von einem Maß Weizen x
. . . . . 3 . . . . $3x$
. . . . . 6 . . . . $6x$
Preis von einem Maß Roken . . . . . y
. . . . . 5 . . . . $5y$
. . . . . 7 . . . . $7y$.

Bed. $\begin{cases} 3x + 5y = 83 \\ 6x + 7y = 145. \end{cases}$

Red. Um die Coefficienten von x gleich zu machen, multiplicire man beyde Seiten der ersten Gleichung mit 2; so bekommt man

$$6x + 10y = 166$$
$$6x + 7y = 145$$

Von beyden Seiten der ersten Gleichung ziehe man die correspondirende der zweyten ab, so bleibt

$$3y = 21$$
$$1y = 7$$
$$5y = 35$$
$$3x = 83 - 35 = 48$$
$$1x = 16,$$

Aufl.	$1x = 16$	Preis von einem Maß	Weizen.
	$1y = 7$	. . . .	Roken.
	$3x = 48$	. . . . . 3 . .	Weizen
	$5y = 35$	. . . . . 5 . .	Roken
	$6x = 96$	. . . . . 6 . .	Weizen
	$7y = 49$	. . . . . 7 . .	Roken.

Probe. $\begin{cases} 48 + 35 = 83 \\ 96 + 49 = 145. \end{cases}$

Andere Beyspiele. Bey einerley Ausgabe für jeden Mann, und für jedes Weib, bezahlen 5 Männer und 7 Weiber zusammen 82 Gulden; und wieder 15 Männer und 8 Weiber, 168 Gulden.

Wieviel bezahlt jeder Mann, und wieviel jedes Weib?

Für 12 Ellen Tuch bekommt ein Kaufmann 14 Ellen Zeug und noch 86 Gulden.

Für 48 Ellen des nämlichen Tuchs bekommt er ein andermal 50 Ellen von eben demselben Zeug und noch 374 Gulden.

Was sind die Preise einer Elle von dem Tuch und von dem Zeug?

Die in diesem § aufgelößte Aufgaben geben Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{cases} mx + ny = p \\ rmx + n'y = p'. \end{cases}$$

Man bringt sie auf Gleichungen von der Beschaffenheit der des vorigen §. wenn man auf beyden Seiten der ersteren mit r multiplicirt: dadurch erhält man folgende $\begin{cases} rmx + rny = rp \\ rmx + n'y = p' \end{cases}$, welche die Gestalt der des vorigen § haben.

Ist $rn = n'$: so ist die Aufgabe unmöglich, wenn nicht auch $rp = p'$; und alsdenn ist sie unbestimmt.

Für $rn > n'$; ist $y = \frac{rp - p'}{rn - n'}$

für $rn < n'$; ist $y = \frac{p' - rp}{n' - rn}$.

§ 34.

Wenn die Coefficienten einer der unbekannten Größen in den zwey Gleichungen keinen gemeinschaftlichen Theiler haben; so verfährt man, um diese Coefficienten gleich zu machen, eben so wie bey der Reduction der Brüche auf einerley Benennung. Nämlich man multiplicirt auf beyden Seiten der einen Gleichung durch den Coefficienten, den die wegzuschaffende unbekannte Größe in der andern Gleichung hat. Und eben so multiplicirt man auf beyden Seiten der andern Gleichung durch den Coefficienten, den jene unbekannte Größe in der ersten hat.

Aufgabe. Fünf Männer und sieben Frauen haben 123 Bazen verzehrt; und auf den nämlichen Fuß haben acht Männer und neun Frauen 177 Bazen verzehrt.

Wieviel verzehrte jeder Mann; wieviel jede Frau?

Ben. Auslage eines Mannes x Auslage einer Frau y
. . von 5 Männern $5x$ . . von 7 Frauen $7y$
. . von 8 Männern $8x$ . . von 9 Frauen $9y$

Bed. $\begin{cases} 5x + 7y = 123 \\ 8x + 9y = 177. \end{cases}$

Red. Man multiplicire auf beyden Seiten der ersten Gleichung mit 8; und auf beyden Seiten der zweyten mit 5; so erhält man:

$$40x + 56y = 984$$
$$40x + 45y = 885$$

folglich $11y = 99$; und also $y = 9$.

Eben so multiplicire man auf beyden Seiten der ersten Gleichung mit neun; und auf beyden Seiten der zweyten mit sieben; so erhält man

$$45x + 63y = 1107$$
$$56x + 63y = 1239$$

folglich $11x = 132$; und also $x = 12$.

Aufl. $x = 12$ Auslage eines Mannes; $y = 9$ Auslage einer Frau
$5x = 60$ . . v. 5 Männern; $7y = 63$ . . v. 7 Frauen
$8x = 96$ . . v. 8 Männern; $9y = 81$ . . v. 9 Frauen.

Probe. $\begin{cases} 60 + 63 = 123 \\ 96 + 81 = 177. \end{cases}$

Andere Beyspiele. Drey Scheffel Korn und vier Scheffel Roken haben 58 Gulden gekostet. In den nämlichen Preisen haben fünf Scheffel Korn und sieben Scheffel Roken 99 Gulden gekostet.

Was kostete jeder Scheffel Korn? was jeder Scheffel Roken?

Von zwey Sorten Wein kosten 15 Bouteillen der ersten, und 11 Bouteillen der zweyten Sorte zusammen 197 Bazen: ferner 16 Bouteillen der ersten und 15 Bouteillen der zweyten Sorte, zusammen 223 Bazen.

Was ist der Preis von jeder Sorte?

Die in diesem § enthaltene Aufgaben werden auf folgende 2 Gleichungen gebracht: $\begin{cases} mx + ny = p \\ m'x + n'y = p'. \end{cases}$

Man multiplicire auf beyden Seiten der ersten Gleichung durch . . . . m'
. . . . andern . . m,
so erhält man $mm'x + m'ny = m'p$
$mm'x + mn'y = mp'$.

1.) Es sey $m'n = mn'$: so muß auch $m'p = mp'$ seyn; und alsdenn ist die Aufgabe unbestimmt. Haben diese beyde Gleichungen nicht zugleich statt; so ist die Aufgabe unmöglich.

2.) Unter der Voraussezung daß die zwey Producte $m'n$, mn', ungleich seyen; muß eines derselben größer seyn als das andere. Es sey $m'n > mn'$: so wird

$$y(m'n - mn') = m'p - mp'$$
$$y = \frac{m'p - mp'}{m'n - mn'}.$$

Ebenso erhält man $x = \frac{np' - n'p}{m'n - mn'}$.

Probe. $$\begin{cases} m \times \frac{np' - n'p}{m'n - mn'} + n \times \frac{m'p - mp'}{m'n - mn'} = \frac{m'np - mn'p}{m'n - mn'} = p \\ m' \times \frac{np' - n'p}{m'n - mn'} + n' \times \frac{m'p - mp'}{m'n - mn'} = \frac{m'np' - mn'p'}{m'n - mn'} = p'. \end{cases}$$

Anmerkung. Wird auf die vorhergehende, aus der Voraussezung $m'n > mn'$ hergeleitete Formeln die Voraussezung $m'n = mn'$ angewendet: so ergiebt sich $x = \frac{np' - n'p}{0}$, welches Unmöglichkeit anzeigt, wofern nicht zugleich $np' = n'p$ ist; in welchem Fall $x = \frac{0}{0}$, also unbestimmt ist.

Wendet man auf die nämliche Formeln die Voraussezung $m'n < mn'$ an; so muß man sie in die folgende verwandeln:

$$x = \frac{n'p - np'}{mn' - m'n}$$

$$y = \frac{mp' - m'p}{mn' - m'n}.$$

Wenn $m'n > mn'$, und zugleich $\begin{cases} np' > n'p \\ m'p > mp' \end{cases}$; so ist die Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage aufgelöst.

Hat man aber $np' > n'p$ und $m'p < mp'$: so ändert sich das Zeichen des Wehrts von y; und die Formeln entsprechen den Gleichungen $\begin{cases} mx - ny = p, \\ m'x - n'y = p'. \end{cases}$

Ebenso entsprechen, wenn $\begin{cases} np' < n'p \\ m'p > mp' \end{cases}$, die Formeln den Gleichungen $\begin{cases} ny - mx = p \\ n'y - m'x = p' \end{cases}$.

Wenn eine oder mehrere der gegebenen Größen $\begin{cases} m, n, p, \\ m', n', p', \end{cases}$ ihr Zeichen verändern; so macht man die dazu gehörigen Zeichenveränderungen in den Gliedern der vorhergehenden Formeln. So entsprechen den Gleichungen $\begin{cases} mx + ny = p \\ m'x - n'y = p' \end{cases}$ die Werthe

$$x = \frac{np' + n'p}{m'n + mn'},$$

$$y = \frac{m'p - mp'}{m'n - mn'}$$

Wirklich wird auch, wenn man die Coefficienten von y gleich gemacht hat, der Werth von x durch Addition der Glieder der erhaltenen Gleichungen gefunden: nämlich,

$$\begin{array}{ll} \text{weil} & mn'x + nn'y = n'p \\ & m'nx - nn'y = np' \\ \hline \text{so ist} & mn'x + m'nx = n'p + n'p. \end{array}$$

§. 35.

Wenn die Coefficienten der unbekannten Größe, welche man wegschaffen will, einen gemeinschaftlichen Theiler haben; so kann man das Verfahren, wodurch man die Coefficienten gleich macht, ungefähr auf die nämliche Art abkürzen wie bey dem ähnlichen Fall der Reduction von 2 Brüchen auf einerley Benennung. Man dividirt nämlich die 2 Coefficienten durch ihren gemeinschaftlichen Theiler; und

multiplicirt jeden derselben mit dem Quotienten der Division des andern durch diesen gemeinschaftlichen Theiler.

Beyspiel. Man habe die zwey Gleichungen $\begin{cases} 6x + 35y = 170 \\ 9x + 28y = 157 \end{cases}$. Die Coefficienten von x haben den gemeinschaftlichen Theiler 3. Dividirt man sie mit diesem gemeinschaftlichen Theiler, so erhält man die Quotienten 2 und 3. Um also dieselbe gleich zu machen, darf man nur auf beyden Seiten der ersten Gleichung durch 3, und auf beyden Seiten der andern durch 2 multipliciren. Dadurch bekommt mon:

$$\begin{array}{rrcl} & 18x + 105y & = & 510 \\ & 18x + 56y & = & 314 \\ \hline \text{Hieraus:} & 49y & = & 196 \\ & 1y & = & 4. \end{array}$$

Eben so haben die Coefficienten von y den gemeinschaftlichen Theiler 7. Die Quotienten ihrer Division durch diesen gemeinschaftlichen Theiler sind 5 und 4. So hat man, um dieselbe gleich zu machen, nur auf beyden Seiten der ersten Gleichung mit 4, und auf beyden Seiten der zweyten mit 5 zu multipliciren; und bekommt:

$$\begin{array}{rrcl} & 24x + 140y & = & 680 \\ & 45x + 140y & = & 785 \\ \hline \text{Hieraus folgt:} & 21x & = & 105 \\ & 1x & = & 5. \end{array}$$

Eben so geben $\begin{array}{l} 12x + 25y = 234 \\ 16x + 15y = 202 \end{array}$ die Gleichungen

$$\begin{array}{rcl|rcl} 48x + 100y & = & 936 & 36x + 75y & = & 702 \\ 48x + 45y & = & 606 & 80x + 75y & = & 1010 \\ \hline 55y & = & 330 & 44x & = & 308 \\ 1y & = & 6 & 1x & = & 7. \end{array}$$

§. 36.

Die bisher erklärte Art Gleichungen mit 2 unbekannten Größen aufzulösen ist die am allgemeinsten anwendbare. Inzwischen gibt es auch noch andere nach der Verschiedenheit der Fälle mehr oder weniger bequeme.

Es seyen die zwey Gleichungen $\begin{cases} 5x + 8y = 85 \\ 12x - 11y = 53 \end{cases}$. In der ersten Gleichung ziehe man auf beyden Seiten $8y$ ab; so erhält man $5x = 85 - 8y$: und hieraus $x = \frac{85 - 8y}{5} = 17 - \frac{8}{5}y$. Diesen Werth von x substituire man in der zweyten Gleichung: so bekommt man $204 - \frac{96}{5}y - 11y = 53$; und die Aufgabe ist demnach auf eine einige unbekannte Größe reducirt: woraus folgt

$$y = 5$$
$$x\left(= 17 - \tfrac{8}{5}y\right) = 9.$$

Dieses Verfahren kann man die **Methode der Substitution** nennen. Sie läßt sich besonders in denjenigen Fällen mit Vortheil gebrauchen, wo sie auf keine Brüche führt.

Das folgende Verfahren kann die **Methode der Vergleichung** heissen. Sie besteht darinn, beyde Gleichungen so zu reduciren, daß das Zeichen der einen unbekannten Größe auf einer Seite derselben allein stehe; und die auf solche Art erhaltene 2 Wehrte dieser Größe einander gleich zu sezen.

So folgt aus den Gleichungen $\begin{cases} 5x + 8y = 85 \\ 12x - 11y = 53 \end{cases}$

$$x = \frac{85 - 8y}{5} = 17 - \frac{8}{5}y$$
$$x = \frac{53 + 11y}{12} = 4 + \frac{11y + 5}{12}.$$

Hieraus: $17 - \frac{8}{5}y = 4 + \frac{11y + 5}{12}$; und folglich $y = 5$.

Die Brüche hiebey zu vermeiden mache man die Coefficienten der abgesondert dargestellten unbekannten Größe gleich, wie bey der ersten Methode.

Beyspiel. $\begin{cases} 9x + 7y = 89 \\ 6x + 11y = 91. \end{cases}$

Hieraus: $\begin{matrix} 9x = 89 - 7y \\ 6x = 91 - 11y \end{matrix}$; $\begin{matrix} 18x = 178 - 14y \\ 18x = 273 - 33y. \end{matrix}$

Demnach: $178 - 14y = 273 - 33y$: woraus man erhält $y = 5$

$$9x = 89 - 35 = 54; \quad x = 6$$
$$6x = 91 - 55 = 36; \quad x = 6.$$

§. 37.

Mehrere von den Aufgaben, welche in dem ersten Capitel so aufgelöst worden sind, daß dabey nur ein Zeichen einer unbekannten Größe gebraucht wurde, lassen sich auch leicht mit Zuhülfeziehung zwey oder mehrerer Zeichen unbekannter Größen auflösen.

1. Beyspiel. Zwey Größen finden, deren Summe s, und Differenz d bekannt sind.

Ben. Die zwey gesuchte Größen seyen x und y.

Bed. $\begin{cases} x + y = s \\ x - y = d. \end{cases}$

Red. $\begin{matrix} 2x = s + d \\ 2y = s - d \end{matrix}$; $\begin{matrix} x = \frac{s+d}{2} \\ y = \frac{s-d}{2}. \end{matrix}$

2. Beyspiel. Zwey Größen finden, deren die Summe s, und die Summe p ihrer Producte durch zwey gegebene Zahlen m und n bekannt sind.

Ben. Gesuchte Größen x und y.

Bed. $\begin{cases} x + y = s \\ mx + ny = p. \end{cases}$

Red. $\begin{cases} mx + my = ms \\ mx + ny = p \end{cases}$ $\qquad nx + ny = ns$, $mx + ny = p$

$$y(m-n) = ms - p \qquad x(m-n) = p - ns$$

$$y = \frac{ms-p}{m-n} \qquad x = \frac{p-ns}{m-n}.$$

Die gegebene Größe s sey die Differenz, nicht die Summe der gesuchten Größen: so sind

$$x - y = s$$
$$mx + ny = p$$

$$mx - my = ms \qquad nx - ny = ns$$
$$mx + ny = p \qquad mx + ny = p$$

$$ny + my = p - ms \qquad mx + nx = p + ns$$

$$y = \frac{p-ms}{m+n} \qquad x = \frac{p+ns}{m+n}.$$

§. 38.

Aufgabe. Drey Personen A, B, C spielen miteinander zu drey verschiedenen malen. Das erste mal verdoppeln B und C ihr Geld auf Kosten von A; das zweytemal verdreyfachen A und C ihr Geld auf Kosten von B; und das drittemal vervierfachen A und B ihr Geld auf Kosten von C. Und nun hat jede von ihnen die Summe a.

Wieviel hatte jede anfänglich, und nach jedem Spiel?

Durch Räsonnement. A und B haben, nach Vierfachung ihres Gelds, jede die Summe a. Folglich hatten sie vor ihrem Gewinn nur ein Viertel von a, oder $\frac{1}{4}$ a. Jede hat also $\frac{3}{4}$ a gewonnen; und C hat $\frac{3}{2}$ a verloren. Nach diesem Verlust hat aber C noch die Summe a. C hatte also vor ihrem Verlust $\frac{5}{2}$ a.

A und C haben, nach Verdreyfachung ihres Gelds, die erste $\frac{1}{4}$ a, die zweyte $\frac{5}{2}$ a. Vor dem Gewinn, den sie auf Kosten von B machten, hatten sie also jede nur ein

Drittel von jenen Größen, nämlich $\frac{1}{12}$ a und $\frac{5}{6}$ a. Folglich haben sie das Dopppelte dieser lezten Größen gewonnen, nämlich $\frac{1}{6}$ a und $\frac{5}{3}$ a; und B hat verloren $\frac{1}{6}$ a + $\frac{5}{3}$ a = $\frac{11}{6}$ a. Nach diesem Verlust hat aber B ein Viertel von a: mithin hatte sie vor demselben $\frac{1}{4}$ a + $\frac{11}{6}$ a = $\frac{3}{12}$ a + $\frac{22}{12}$ a = $\frac{25}{12}$ a.

B und C haben, nachdem sie ihr Geld auf Kosten von A verdoppelt, die erste $\frac{25}{12}$ a, die zweyte $\frac{5}{6}$ a. Sie hatten also vor ihrem Gewinn $\frac{25}{24}$ a und $\frac{5}{12}$ a; und eben so viel hatten sie gewonnen. A hat folglich $\frac{25}{24}$ a + $\frac{5}{12}$ a = $\frac{35}{24}$ a verloren. Nach diesem Verlust behielt aber A noch $\frac{1}{12}$ a. Mithin hatte A vor ihrem Verlust, oder anfänglich, $\frac{25}{24}$ a + $\frac{1}{12}$ a = $\frac{37}{24}$ a.

	A	B	C hatten also
1stens . .	$\frac{37}{24}$a . .	$\frac{25}{24}$a . .	$\frac{5}{12}$a.
2tens . .	$\frac{1}{12}$a . .	$\frac{25}{12}$a . .	$\frac{5}{6}$a.
3tens . .	$\frac{1}{4}$a . .	$\frac{1}{4}$a . .	$\frac{5}{2}$a.
4tens . .	a . .	a . .	a.

Algebr. Ben.

	Geld der Person A;	der Person B;	der Person C.
1stes	3a — x — y	x	y
2tes	3a — 2x — 2y	2x —	2y
3tes	9a — 6x — 6y	6x — 6a	6y
4tes	36a — 24x — 24y	24x — 24a	24y — 9a

Bed. $\begin{cases} 24x - 24a = a \\ 24y - 9a = a. \end{cases}$

Red. $\begin{cases} 24x = 25a \\ 24y = 10a. \end{cases}$

Aufl. $x = \frac{25}{24}a$
$y = \frac{5}{12}a$

$3a - x - y = \frac{37}{24}a$ übereinstimmend mit der arithmetischen Auflösung.

Anmerkung. Ungeachtet in die Benennungen zwey unbekannte Größen aufgenommen waren; ist doch die Auflösung auf zwey Gleichungen gebracht worden, deren jede nur eine unbekannte Größe enthielte.

Andere Beyspiele. Bey dem ersten Spiel haben B und C ihr Geld um die Hälfte vermehrt; bey dem zweyten haben A und C ihr Geld um ein Drittel vermehrt; und bey dem dritten haben A und B ihr Geld um ein Viertel vermehrt. Am Ende haben sie die Summen a, b, c.

Allgemein. Nach dem ersten Spiel haben B und C jede $\frac{1}{m}$ mehr als vorher, oder $\frac{m+1}{m}$ ihres vorherigen Gelds. Nach dem zweyten Spiel haben A und C jede $\frac{1}{n}$ mehr als vor demselben, oder $\frac{n+1}{n}$ ihres vorigen Gelds. Und nach dem dritten Spiel haben A und B jede $\frac{1}{p}$ mehr als vor demselben, oder $\frac{p+1}{p}$ ihres vorigen Gelds. Am Ende haben A, B, C die Summen a, b, c.

Abgekürzte Darstellung der Auflösung.

Nennt man x und y das anfängliche Geld von B und C: so ergeben sich für das, was sie viertens und leztens haben, die Ausdrücke: $\frac{m+1}{m}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{p+1}{p}x-\frac{1}{n}\cdot\frac{p+1}{p}(a+b+c)$, und $\frac{m+1}{m}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{p+1}{p}y-\frac{1}{p}(a+b+c)$.

Vermöge der Bedingungen sind also
$$\begin{cases}\frac{m+1}{m}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{p+1}{p}x-\frac{1}{n}\cdot\frac{p+1}{p}(a+b+c)=b\\ \frac{m+1}{m}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{p+1}{p}y-\frac{1}{p}(a+b+c)=c.\end{cases}$$

Demnach $x=\frac{m}{(m+1)(n+1)}(a+b+c)+\frac{mnp}{(m+1)(n+1)(p+1)}b.$

$$y=\frac{mn}{(m+1)(n+1)(p+1)}(a+b+c)+\frac{mnp}{(m+1)(n+1)(p+1)}c.$$

$$a+b+c-(x+y)=\frac{mnp+(n+1)(p+1)}{(m+1)(n+1)(p+1)}(a+b+c)-\frac{mnp}{(m+1)(n+1)(p+1)}b-\frac{mnp}{(m+1)(n+1)(p+1)}c.$$

§ 39.

Aufgabe. Ein Rechtek (Rectangel) ist so beschaffen, daß wenn man seine Länge um a Schuhe, und die Breite um b Schuhe verlängert, sein Flächeninhalt um p Quadratschuhe größer wird.

Vermehrt man aber seine Länge um a' Schuhe, und die Breite um b' Schuhe; so wird sein Flächeninhalt um p' Quadratschuhe größer.

Welches sind die Seiten dieses Rechteks?

Bez.	Erstes Rechtek.	Zweytes Rechtek.	Drittes Rechtek.
Länge	x	$x+a$	$x+a'$
Breite	y	$y+b$	$y+b'$
Flächeninhalt	xy	$xy+ay+bx+ab$	$xy+a'y+b'x+a'b'$
Vergrößerungen		$ay+bx+ab$	$a'y+b'x+a'b'$.

Bed. $\begin{cases} ay+bx+ab=p \\ a'y+b'x+a'b'=p'. \end{cases}$

Red. $\begin{cases} aa'y+a'bx+aa'b=pa' & ab'y+bb'x+abb'=pb' \\ aa'y+ab'x+aa'b'=p'a & a'by+bb'x+a'bb'=p'b \end{cases}$

Erster Fall. Es sey $a'b=ab'$: so muß auch $a'(p-ab) = a(p'-a'b')$ oder $\frac{p-ab}{a}=\frac{p'-a'b'}{a}$ seyn. Weil aber $a'b=ab'$: so ist $\frac{a}{b}=\frac{a}{b'}$; und $\frac{p-ab}{a}\times\frac{a}{b}=\frac{p'-a'b'}{a'}\times\frac{a'}{b'}$, oder $\frac{p-ab}{b} = \frac{p'-a'b'}{b'}$; und $b'(p-ab)=b(p'-a'b')$.

Ist also, unter der Voraussezung $a'b=ab'$, nicht zugleich $\frac{p-ab}{a}=\frac{p'-a'b'}{a'}$, folglich $\frac{p-ab}{b}=\frac{p'-a'b'}{b'}$; so ist die Aufgabe unmöglich. Hingegen wird sie unbestimmt, wenn eine der zwey lezten Gleichungen mit der ersten $a'b=ab'$ oder $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ zugleich statt hat.

Zweyter Fall. Von den zwey Größen $a'b$, ab' seye die eine $a'b$ größer als die andere ab'; so werden

$$x(a'b-ab')=a'(p-ab)-a(p'-a'b');\; x=\frac{a'(p-ab)-a(p'-a'b')}{a'b-ab'}$$

$$y(a'b-ab')=b(p'-a'b')-b'(p-ab);y=\frac{b(p'-a'b')-b'(p-ab)}{a'b-ab'}.$$

Aufl. $x=\frac{a'(p-ab)-a(p'-a'b')}{a'b-ab'}$ Länge des ersten Rechteks.

$y=\frac{b(p'-a'b')-b'(p-ab)}{a'b-ab'}$ Breite.

$$xy=\frac{a'b(p-ab)(p'-a'b')-ab(p'-a'b')^2-a'b'(p-ab)^2+ab'(p-ab)(p'-a'b')}{(a'b-ab')^2}$$

$$=\frac{(a'b+ab')(p-ab)(p'-a'b')-ab(p'-a'b')^2-a'b'(p-ab)^2}{(a'b-ab')^2}$$ Flächeninhalt

$$x+a=\frac{a'(p+ab')-a(p'+ab')}{a'b-ab'}$$

$$y+b=\frac{b(p'+a'b')-b'(p+a'b)}{a'b-ab'}$$

$$ay+bx+ab=\frac{ab(p'-a'b')-ab'(p-ab)+a'b(p-ab)-ab(p'-a'b')}{a'b-ab'}+ab$$

$$=\frac{(p-ab)(a'b-ab')}{a'b-ab'}+ab=p-ab+ab=p$$

$$x+a'=\frac{a'(p+a'b)-a(p'+a'b)}{a'b-ab'}$$

$$y+b'=\frac{b(p'+ab')-b'(p+ab')}{a'b-ab'}$$

$$a'y+b'x+a'b'=\frac{a'b(p'-a'b')-a'b'(p-ab)+a'b'(p-ab)-ab'(p'-a'b')}{a'b-ab'}+a'b'$$

$$=\frac{(a'b-ab')(p'-a'b')}{a'b-ab'}+a'b'=p'-a'b'+a'b'=p'.$$

Anmerkung. Sezt man $a'b=ab'$: so wird $x=\frac{a'(p-ab)-a(p'-a'b')}{0}$, welches Unmöglichkeit anzeigt, wofern nicht zugleich $a'(p-ab)=a(p'-a'b')$ ist; in welchem Fall $x=\frac{0}{0}$, also unbestimmt ist.

Ist $a'b>ab'$, und zugleich $\begin{cases}a'(p-ab)>a(p'-a'b');\\ b(p'-a'b')>b'(p-ab)\end{cases}$ so ist die Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage aufgelöst.

Ist aber $\begin{cases} a'(p-ab) < a(p'-a'b') \\ b(p'-a'b') < b'(p-ab) \end{cases}$; so müssen die Seiten des ersten Rechteks von den gegebenen Größen a, b, a', b' abgezogen werden, um die Seiten der andern Rechteken zu bekommen. Und hat man $\begin{pmatrix} a'(p-ab) > a(p'-a'b') \\ b(p'-a'b') < b'(p-ab) \end{pmatrix}$; so muß man die Breite des ersten Rechteks von den gegebenen Größen b und b' abziehen, um die beyde andere Rechteke zu erhalten.

Diese Formeln sind auch auf die Fälle anwendbar, in welchen eine oder mehrere der gegebenen Größen a, b, a', b' ihr Zeichen ändern, oder, statt zu den Seiten des ersten Rechteks addirt, von denselben abgezogen werden müssen. Und so lösen die vorhergehende Formeln 16 Aufgaben auf, welche sich durch die Verschiedenheit der Zeichen jener 4 Größen unterscheiden; je nachdem nämlich alle vier additiv, drey additiv und eine subtractiv, zwey additiv und zwey subtractiv, eine additiv und drey subtractiv, oder endlich alle vier subtractiv sind.

Beyspiel. Die 4 Größen a, b, a', b' seyen subtractiv: so wird $x = \frac{-a'(p-ab)+a(p'-a'b')}{a'b-ab'} = \frac{a'(ab-p)-a(a'b'-p')}{a'b-ab'}$. In diesem Fall müßen aber die Größen p und p' ebenfalls subtractiv werden. Man hat also $x = \frac{a'(ab+p)-a(a'b'+p')}{a'b-ab'}$.

Die Seiten des zweyten Rechteks sind nämlich nun $x-a$, $y-b$; der zweyte Flächeninhalt ist $xy-ay-bx+ab$; und die Abnahme ist $ay+bx-ab$.

Ebenso ist die zweyte Abnahme $a'y+b'x-a'b'$.

Folglich hat man

$$ay+bx-ab=p$$
$$a'y+b'x-a'b=p'$$

woraus man den obigen Ausdruk für x erhält.

§ 40.

In den bisherigen Beyspielen mit zwey unbekannten Grössen leitete man die Reduction so ein, daß die Aufgabe anf eine einige unbekannte Grösse gebracht wurde. Eben so ist bey Aufgaben mit drey oder mehreren unbekannten Grössen der Zwek, die Anzahl der unbekannten immer nach und nach um eine zu vermindern; bis man den Wehrt von einer derselben erhält: durch dessen Substitution man rukwärts nach und nach alle übrige finden kann.

Aufgabe.

4 Männer 3 Weiber und 2 Kinder verzehren 38 Bazen
5 . . 4 . . . 3 . . . . . . 50 . .
7 . . 5 . . . 4 . . . . . . 67 . .

Was verzehrte ein Mann, ein Weib, ein Kind?

Ben.

Gesuchte Ausgaben eines Mannes, eines Weibs, eines Kindes.
x, y, z.

Bed. $\begin{cases} 4x+3y+2z=38 & (A) \\ 5x+4y+3z=50 & (B) \\ 7x+5y+4z=67 & (C). \end{cases}$

Red. Man mache die Coefficienten von z in den Gleichungen A und B gleich; so erhält man

$$12x+9y+6z=114$$
$$10x+8y+6z=100.$$

Abgezogen: $2x+1y \quad = 14$ (D).

Ebenso mache man die Coefficienten von z in den Gleichungen A und C gleich; so erhält man

$$8x+6y+4z=76$$
$$7x+5y+4z=67.$$

Abgezogen: $1x+1y \quad = 9$ (E).

Man hat also zwey Gleichungen mit zwey unbekannten Größen $\begin{cases} 2x+y=14 \\ x+y=9 \end{cases}$; woraus man bekommt:

$$x = 5$$
$$y = 4.$$

Substituirt man diese Wehrte z. E. in der Gleichung A, so erhält man

$$20+12+2z=38; \text{ und } z=3.$$

Aufl. $x=5$ Ausgabe eines Mannes
$y=4$ . . . . Weibs
$z=3$ . . . . Kindes.

Probe. $\begin{cases} 4\times5+3\times4+2\times3=38 \\ 5\times5+4\times4+3\times3=50 \\ 7\times5+5\times4+4\times3=67. \end{cases}$

Andere Beyspiele.

10 Scheffel Dinkel,	15 Scheffel Roken	und 6 Scheffel Haber	kosten 582 fl.
25	36	18	1464 =
4	5	3	222 =

Was sind die Preise von jeder Gattung?

Man hat 3 Massen, wovon jede aus 3 zusammengeschmolzenen Metallen nach folgenden Verhältnissen besteht.

Ein Pfund der ersten Maße enthält	14 Loth Silber,	6 Loth Kupfer,	12 Loth Zinn
. . . zweyten	24 . . .	6 . . .	2 . .
. . . dritten	8 . . .	14 . . .	10 . .

Wieviel muß man von jeder Masse nehmen, um eine Masse von einem Pfund daraus zusammen zu sezen, welches 16 Loth Silber, 6 Loth 3 Quintchen Kupfer, 8 Loth 1 Quintchen Zinn enthält?

Das Pfund zu 32 Loth, und 1 Loth zu 4 Quintchen gerechnet.

Allgemein. Man habe die drey Gleichungen aufzulösen

$$\begin{cases} ax+by+cz=p \quad \ldots\ldots\ldots \quad A \\ a'x+b'y+c'z=p' \quad \ldots\ldots\ldots \quad B \\ a''x+b''y+c''z=p'' \quad \ldots\ldots\ldots \quad C. \end{cases}$$

Red. $$\begin{array}{l} ac'x+bc'y+cc'z=pc' \\ a'cx+b'cy+cc'z=p'c \\ \hline x(ac'-a'c)+y(bc'-b'c)=pc'-p'c \quad \ldots \quad D \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ac''x+bc''y+cc''z=pc'' \\ a''cx+b''cy+cc''z=p''c \\ \hline x(ac''-a''c)+y(bc''-b''c)=pc''-p''c \quad \ldots \quad E. \end{array}$$

Sind in der Gleichung D zugleich $ac'=a'c$ und $bc'=b'c$: so ist die Aufgabe unbestimmt, oder unmöglich; je nachdem pc' und $p'c$ gleich sind oder nicht. Eben so verhält sichs mit der Gleichung E in Beziehung auf die Größen $ac''-a''c$ und $bc''-b''c$.

Sind zugleich $ac'=a'c$ und $ac''=a''c$; so ist die Aufgabe wieder unbestimmt. Und eben so ists, wenn $bc'=b'c$ und $bc''=b''c$.

Behandelt man die zwey Gleichungen D und E nach Art der Gleichungen mit zwey unbekannten Größen; so erhält man

$$x = \frac{pb'c''-pb''c'+p'b''c-p'bc''+p''bc'-p''b'c}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$$

desgleichen: $$y = \frac{pa'c''-pa''c'+p'a''c-p'ac''+p''ac'-p''a'c}{ba'c''-ba''c'+b'ac''-b'ac''+b''ac'-b''a'c}$$

$$= \frac{p'ac''-p''ac'+p''a'c-pa'c''+pa''c'-p'a''c}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$$

$$z = \frac{pa'b''-pa''b'+p'a''b-p'ab''+p''ab'-p''a'b}{cab''-ca''b'+c'a''b-c'ab''+c''ab'-c''a'b}$$

$$= \frac{p''ab'-p'ab''+pa'b''-p''a'b+p'a''b-pa''b'}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc'+a''bc'-a''bc'}.$$

1. Anmerkung. Wenn $ab'c'' + a'b''c + a''bc' = ab''c' + a'bc'' + a''b'c$ ist: so ist die Aufgabe unbestimmt oder unmöglich; je nachdem die drey Zähler zu gleicher Zeit verschwinden, oder nicht. Sollen sie zugleich verschwinden; so sind die Größen p, p', p'', unter sich und in den gegebenen Coefficienten durch die drey Gleichungen bestimmt:

$$p(b'c''-b''c') + p'(b''c-bc'') + p''(bc'-b'c) = 0$$
$$p(a'c''-a''c') + p'(a''c-ac'') + p''(ac'-a'c) = 0$$
$$p(a'b''-a''b') + p'(a''b-ab'') + p''(ab'-a'b) = 0.$$

2. Anmerkung. So verwikelt auch der Ausdruk von einer der unbekannten Größen, z. B. von x, scheinen mag; so sieht man doch, daß er in Beziehung auf die gegebene Größen symmetrisch ist. Der Nenner besteht nämlich aus Producten von drey Dimensionen der Größen a, b, c; welche, die diesen augehängte Unterscheidungszeichen (Indices, Zeiger) o, I, II, beyseite gesezt, die nämliche sind: und diese Unterscheidungszeichen müßen jenen Buchstaben auf alle mögliche Arten, wornach sie sich versezen lassen, also auf sechserien Arten, beygefügt werden. Diejenige Producte, worinn die Unterscheidungszeichen nach einer der drey Ordnungen

$$\left\{\begin{matrix} \text{o}, & \text{I}, & \text{II} \\ \text{I}, & \text{II}, & \text{o} \\ \text{II}, & \text{o}, & \text{I} \end{matrix}\right\}$$ auf einander folgen, haben das Zeichen der Addition: die andere, worinn die Folgen der Unterscheidungszeichen die umgekehrten der vorigen sind, haben das Zeichen der Subtraction. Der Zähler entsteht aus dem Nenner, indem man statt der Coefficienten a, a', a'', die Größen p, p', p'', sezt.

Diese Regel läßt sich auf die Auflösung der Gleichungen von irgend einer Anzahl unbekannter Größen ausdehnen *). Da sich aber die Entwiklung davon auf die Theorie

*) Siehe den Anhang N° I, p. 657. f. der Introduction à l'Analyse des lignes courbes, par Mr. Cramer, Prof. de Mathematiques à Genéve: und des Herrn Prof. Hindenburg Vorrede zu Herrn Rüdigers Specimem analyticum de lineis curvis secundi ordinis.

der Combinationen gründet; so kann ich mich hier nicht länger dabey aufhalten. Ich gehe nun zu einigen Aufgaben über, welche sich auf eine besondere Art behandeln lassen.

§ 41.

Aufgabe. Das Vermögen von drey Personen A, B, C, ist folgendermaßen beschaffen:

die Summe des Vermögeus von A und des doppelten der Summe des Vermögens von B und C ist . . . . a.

Die Summe des Vermögens von B und des dreyfachen der Summe des Vermögens von A und C ist . . . b.

Die Summe des Vermögens von C und des vierfachen der Summe des Vermögens von A und B ist . . . . c.

Wieviel hat jede?

Diese Aufgabe könnte auf die nämliche Art, wie die vorhergehenden, aufgelöst werden. Es ist aber besser, noch eine neue unbekannte Größe zu Hülfe zu nehmen; nämlich die Summe des Vermögens der drey Personen. Man bezeichne das gesuchte Vermögen von A, B, C durch x, y, z; und die Summe davon seye s.

$$\text{Bed.} \begin{cases} x + 2(s - x) = a \\ y + 3(s - y) = b \\ z + 4(s - z) = c. \end{cases}$$

$$\text{Red.} \begin{cases} 2s - x = a \\ 3s - 2y = b \\ 4s - 3z = c. \end{cases}$$

Macht man die Coefficienten von x, y, z gleich; so erhält man:

$$12s - 6x = 6a$$
$$9s - 6y = 3b$$
$$8s - 6z = 2c.$$

Hieraus: $29s - 6s = 6a + 3b + 2c$

$$23s = 6a + 3b + 2c$$

$$s = \frac{6a + 3b + 2c}{23}$$

$$x(= 2s - a) = \frac{-11a + 6b + 4c}{23}.$$

$$2y(= 3s - b) = \frac{18a - 14b + 6c}{23};\ y = \frac{9a - 7b + 3c}{23}.$$

$$3z(= 4s - c) = \frac{24a + 12b - 15c}{23};\ z = \frac{8a + 4b - 5c}{23}.$$

$$\text{Aufl.} \begin{cases} x = \frac{-11a + 6b + 4c}{23} \\ y = \frac{9a - 7b + 3c}{23} \\ z = \frac{8a + 4b - 5c}{23}. \end{cases}$$

$$s = \frac{6a + 3b + 2c}{23};\ s - x = \frac{17a - 3b - 2c}{23};\ s - y = \frac{-3a + 10b - c}{23};\ s - z = \frac{-2a - b + 7c}{23}.$$

$$\text{Probe.} \begin{cases} \frac{-11a + 6b + 4c}{23} + 2 \times \frac{17a - 3b - 2c}{23} = a. \\ \frac{9a - 7b + 3c}{23} + 3 \times \frac{-3a + 10b - c}{23} = b. \\ \frac{8a + 4b - 5c}{23} + 4 \times \frac{-2a - b + 7c}{23} = c. \end{cases}$$

Andere Beyspiele. Das Vermögen von A mit der Hälfte der Summe des Vermögens von B und C zusammen, macht . . . . a.

Das Vermögen von B mit dem Drittel der Summe des Vermögens von A und C zusammen, ist . . . . b.

Das Vermögen von C mit dem Viertel der Summe des Vermögens von A und B zusammen, gibt . . . c.

Desgleichen. Die Summe des Vermögens von A und B übersteigt das Vermögen von C um die Größe a.

Das Doppelte der Summe des Vermögens von A und C übertrift das Vermögen von B um die Größe . . . b.

Das Dreyfache der Summe des Vermögens von B und C übersteigt das Vermögen von A um die Größe . . . c.

Allgemein.

Das Vermögen von A mit dem mfachen der Summe des Vermögens von B und C zusammen ist . . . . . a.

Das Vermögen von B mit dem nfachen der Summe des Vermögens von A und C zusammen ist . . . . . b.

Das Vermögen von C mit dem pfachen der Summe des Vermögens von A und B zusammen ist . . . . . c.

Was ist das Vermögen eines jeden?

Das mfache der Summe des Vermögens von A und B übersteigt das Vermögen von C um die Größe . . . a.

Das nfache der Summe des Vermögens von A und C übersteigt das Vermögen von B um die Größe . . . b.

Das pfache der Summe des Vermögens von B und C übersteigt das Vermögen von A um die Größe . . . c.

§. 42.

Aufgabe.

Das Verm. v. A u. die Hälfte des Verm. v. B machen zusam. c.
. . . . B u. ein Drittel d. Verm. v. C . . . . a.
. . . . C u. ein Viertel d. Verm. v. A . . . . b.

Was hat jeder im Vermögen?

Bey. Das Vermögen von A, B, C, seye
x, y, z.

Bed. $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = c \\ y + \frac{1}{3}z = a \\ \frac{1}{4}x + z = b \end{cases}$

Red. $\begin{cases} 2x+y \qquad = 2c \\ \quad\; y+\frac{1}{3}z = a \end{cases}$

$$2x \quad -\tfrac{1}{3}z = 2c - a$$

$$6x \quad - z = 6c - 3a$$

$$\tfrac{1}{4}x \quad + z = b$$

$$6\tfrac{1}{4}x \quad = -3a+b+6c$$

Aufl. $$x = \frac{-12a+4b+24c}{25}$$

$$y = 2c - \frac{-24a+8b+48c}{25} = \frac{24a-8b+2c}{25}$$

$$z\left(=b-\tfrac{1}{4}x\right) = b - \frac{-3a+b+6c}{25} = \frac{3a+24b-6c}{25}$$

Probe. $$\begin{cases} \dfrac{-12a+4b+24c}{25} + \dfrac{12a-4b+c}{25} = c \\[2ex] \dfrac{24a-8b+2c}{25} + \dfrac{a+8b-2c}{25} = a \\[2ex] \dfrac{-3a+b+6c}{25} + \dfrac{3a+24b-6c}{25} = b. \end{cases}$$

Anderes Beyspiel.

Das Vermögen von A übersteigt die Hälfte des Vermögens von B um die Summe c

Das Vermögen von B übersteigt das Drittel des Vermögens von C um die Summe . . . . . . a.

Das Vermögen von C übersteigt das Fünftel des Vermögens von A um die Summe . . . . . b.

§. 43.

Aufgabe. Das Vermögen von 4 Personen A, B, C, D, ist folgendermaßen beschaffen:

die Summen des Vermögens von
- A und des doppelten
- B . . . dreyfachen
- C . . . vierfachen
- D . . . fünffachen

der Summe des Vermögens der drey andern sind
- a
- b
- c
- d,

Wieviel hat jede?

Desgleichen. Das Vermögen von 5 Personen A, B, C, D, E wird durch folgende Bedingungen bestimmt:

die Summen des Vermögens von $\left\{\begin{array}{l}\text{A und der Hälfte} \\ \text{B . . des Drittels} \\ \text{C . . des Viertels} \\ \text{D . . des Fünftels} \\ \text{E . . des Sechstels}\end{array}\right\}$ der Summe des Vermögens der 4 andern sind $\left\{\begin{array}{l}a \\ b \\ c \\ d \\ e.\end{array}\right.$

Ferner: das Vermögen A, B, C, D, E von 5 Personen sey durch folgende Bedingungen zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
A+\tfrac{1}{2}B &= a \\
B+\tfrac{1}{3}C &= b \\
C+\tfrac{1}{4}D &= c \\
D+\tfrac{1}{5}E &= d \\
+\tfrac{1}{6}A \qquad E &= e.
\end{aligned}$$

So sind

$$\begin{aligned}
2A+B &= 2a \\
3B+C &= 3b \\
4C+D &= 4c \\
5D+E &= 5d \\
A \qquad +6E &= 6e.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6A+3B &= 6a \\
3B+C &= 3b \\
\hline
6A-C &= 6a-3b \\
24A-4C &= 24a-12b \\
4C+D &= 4c \\
\hline
24A+D &= 24a-12b+4c \\
120A+5D &= 120a-60b+20c \\
5D+E &= 5d \\
\hline
120A-E &= 120a-60b+20c-5d \\
720A-6E &= 720a-360b+120c-30d \\
A+6E &= 6e \\
\hline
721A &= 720a-360b+120c-30d+6e \\
A &= \frac{720a-360b+120c-30d+6e}{721}
\end{aligned}$$

Aufl. $A = 6 \times \frac{120a - 60b + 20c - 5d + e}{721}$

$B = 2(a - A) = 2 \times \frac{a + 360b - 120c + 30d - 6e}{721}$

$C = 3(b - B) = 3 \times \frac{-2a + b + 240c - 60d + 12e}{721}$

$D = 4(c - C) = 4 \times \frac{6a - 3b + c + 180d - 36e}{721}$

$E = 5(d - D) = 5 \times \frac{-24a + 12b - 4c + d + 144e}{721}$.

Drittes Capitel.

Von den geometrischen Proportionen.

Die geometrischen Verhältnisse und Proportionen sind von so großem Nuzen, in ihrer Anwendung nicht nur in der reinen und angewandten Mathematik, sondern auch im gemeinen Leben so wichtig, und, wie die Folge dieses Werks zeigen wird, so unentbehrlich, daß ich, ehe ich weiter gehe, ihre allgemeine Theorie kurz vortragen zu müssen glaube.

§. 44.

Erklärungen. Wenn man die Vergleichung zweyer Größen in der Absicht anstellt, zu erfahren, wievielmal die eine die andere enthalte, so sagt man: man untersuche das geometrische **Verhältniß** dieser zwey Größen. Das Resultat dieser Vergleichung, oder der Quotient, den man erhält, wenn man die eine dieser Größen durch die andere dividirt, heißt der **Exponent** dieses Verhältnißes.

So, wenn man die zwey Zahlen 8 und 4 in der Absicht zu wissen, wie vielmal die eine die andere enthält, mit einander vergleicht, sagt man: man beschäftige sich mit ihrem geometrischen Verhältniß; und die Zahl 2, welche das Resultat dieser Vergleichung ist, heißt der Exponent dieses Verhältnisses.

Von den zwey Größen, die man miteinander vergleicht, heißt die erste das **Vorderglied**, und die zweyte das **Hinterglied** des Verhältnisses.

Der Exponent eines Verhältnisses kann also immer als eine abstracte Zahl betrachtet werden; nämlich als diejenige, welche anzeigt, wie vielmal eine der zwey Größen, die man vergleicht, die andere enthält: ebenso wie der Quotient einer Division eine abstracte Zahl ist, wenn die beyden Glieder der Division Größen von einerley Art sind.

Sind die Exponenten zweyer Verhältnisse gleich; so sagt man: diese zwey **Verhältnisse** seyen gleich.

Wenn die zwey Glieder des einen Verhältnisses Größen von irgend einerley Art sind; so können die zwey Glieder des andern Verhältnisses von eben dieser, oder von irgend einer andern einerley Art seyn. Man kann sich aber auch die zwey Glieder eines Verhältnisses als auf abstracte Zahlen reducirt vorstellen: indem man jedes derselben in beyderseits gleiche Theile theilt; und die Anzahlen dieser in jedem derselben enthaltenen Theile nimmt. So wenn von zwey Zeiten die eine 5 Stunden, die andere 7 Stunden enthält (wobey eine Stunde einer der gleichen Theile ist, in welche beyde Zeiten getheilt sind): so verhalten sich diese zwey Zeiten wie die zwey Zahlen 5 und 7; oder das Verhältniß der zwey Zeiten ist das der zwey Zahlen 5 und 7.

Die Arithmetik und besonders die Geometrie geben sehr oft Gelegenheit sich mit Gleichheit solcher Verhältnissen zu beschäftigen, wo die Glieder des einen von einer, und die des andern von einer andern Art sind. Ich

werde diesen Gegenstand hier auf die abstracteste Art betrachten; und zu diesem Ende die Größen, womit man sich beschäftiget, als auf ZahlenAusdrücke gebracht annehmen, welche durch allgemeine Zeichen werden vorgestellt werden.

So kann ein Verhältniß unter der Gestalt eines Bruchs dargestellt werden, dessen Zähler und Nenner das Vorder = und Hinterglied dieses Verhältnisses sind. Die Größe dieses Bruchs selbst, welche der Ausdruk des Quotienten der Division des ersten Glieds durch das zweyte ist, entspricht der Größe des Exponenten.

Hieraus folgt: daß man die zwey Glieder eines Verhältnisses durch einerley Zahl multipliciren oder dividiren kann, ohne seinen Exponenten, folglich die Größe des Verhältnisses zu ändern.

Sind zwey Verhältnisse gleich; so sagt man, die Glieder derselben machen eine **Proportion.** Man sagt nämlich; das erste Vorderglied verhalte sich zum ersten Hinterglied, wie das zweyte Vorderglied zum zweyten Hinterglied.

Sind die Größen a und b die zwey Glieder des einen Verhältnisses, und die Größen c und d die zwey Glieder eines anderen Verhältnisses, das jenem gleich ist: so wird die Gleichheit dieser zwey Verhältnisse, oder die Proportion, welche ihre Glieder bilden, so ausgedrükt: $a:b=c:d$; welche man liest: a verhalte sich zu b, wie c zu d.

§. 45.

Lehrsaz. In jeder Proportion ist das Product der äußern Glieder dem Product der mittleren gleich.

Symbolisch. Wenn $a:b=c:d$; so ist $ad=bc$.

Beweis. Nach der Voraussezung ist $a:b=c:d$;

Es ist aber . . . . . $a:b=ad:bd$ } (§. 44.)
und . . . . . $c:d=bc:bd$ } (§. 44.)
Folglich: . . . . . $ad:bd=bc:bd$.

Nun sind die zwey Hinterglieder dieser Proportion gleich. Folglich sind auch die zwey Vorderglieder gleich; das heißt ad ist = bc.

Umgekehrt. Wenn zwey Producte gleich sind; und man sezt die zwey Factoren des einen als äußere, und die zwey Factoren des andern als mittlere Glieder: so bilden diese 4 auf solche Art geordnete Glieder eine Proportion.

Symbolisch. Wenn $ad = bc$; so ist $a:b = c:d$.

Beweis. Weil $ad = bc$
so ist $ad:bd = bc:bd$
Nun ist $ad:bd = a:b$
und $bc:bd = c:d$ } (§. 44.)
Folglich $a:b = c:d$.

1. Zusaz. Der Ausdruk des vierten Gliedes einer Proportion, deren drey erste Glieder bekannt sind, wird gefunden, wenn man das Product der zwey mittleren durch das erste Glied dividirt.

Denn da aus der Proportion $a:b = c:d$
die Gleichung folgt $ad = bc$;
so wird, auf beyden Seiten mit a dividirt, $d = \frac{bc}{a}$.

Dieser Zusaz enthält den Grund der Regel de tri, welche in der Arithmetik eine so bedeutende Rolle spielt.

2. Zusaz. In einer gegebenen Proportion können die zwey mittlere Glieder, oder die zwey äußere Glieder, und auch die mittlere und äußere Glieder versezt werden. Bey allen diesen Versezungen bleiben nämlich die der Voraussezung zufolge gleichen Producte der ersten äußern und mittleren Glieder die nämliche, und folglich gleich. Die Proportion hat also immer statt.

Tafel dieser Verwechslungen:

Angenommene Proportion: 1.) $a:b=c:d$

Abgeleitete Proportionen
- 2.) $a:c=b:d$
- 3.) $b:a=d:c$
- 4.) $b:d=a:c$
- 5.) $c:d=a:b$
- 6.) $c:a=d:b$
- 7.) $d:b=c:a$
- 8.) $d:c=b:a$.

§. 46.

Lehrsatz. Aus jeder Proportion lassen sich folgende andere herleiten: die Summe oder die Differenz der zwey Glieder des ersten Verhältnisses, verhält sich zum Vorderglied oder Hinterglied dieses Verhältnisses, wie die Summe oder die Differenz der zwey Glieder des andern Verhältnisses, sich zum Vorderglied oder Hinterglied dieses Verhältnisses verhält.

Es sey die FundamentalProportion $a:b=c:d$; so folgen daraus.

1.) $a+b:b=c+d:d$.

Beweis. $a+b$ enthält nämlich b einmal mehr, als a die b enthält. Auch enthält $c+d$ die d einmal mehr als c die d enthält. Demnach sind die Exponenten der Verhältnisse $a+b$ zu b, und $c+d$ zu d, beyde um eine Einheit größer, als die Exponenten der Verhältnisse a zu b, und c zu d. Diese sind aber als gleich angenommen: folglich sind auch jene gleich; und man hat demnach $a+b:b=c+d:d$. Diese Folgerung sagt man geschehe *componendo* oder *addendo*.

2.) $a-b:b=c-d:d$.

Der Beweis wird wie für n° 1. geführt; nur mit dem Unterschied, daß die Exponenten der Verhältnisse $a-b$ zu b, und $c-d$ zu d beyde um eine Einheit kleiner sind

als die Exponenten der Verhältnisse a zu b und c zu d. Hiebey, wird gesagt, verfahre man *dividendo* oder *subtrahendo.*

3.) $a + b : a = c + d : c$.

Beweis. Weil $a : b = c : d$: so ist auch $b : a = d : c$ (§. 45. Zus. 2. n° 3.); folglich nach 1: $b + a : a = d + c : c$

4.) $a - b : a = c - d : c$.

Dies wird aus n° 2 ebenso wie n° 3 aus n° 1 gefolgert.

5.) $a + c : b + d = a : b$.

Beweis. $a : c = b : d$ (§. 45. Zus. 2. n° 2.)
Folglich $a + c : a = b + d : b$ (3.)
und $a + c : b + d = a : b$ (§. 45. Zus. 2. n° 2.)

6.) $a - c : b - d = a : b$

Wird eben so mittelst n° 2 bewiesen.

Anmerkung. Die Folgerung n° 5 läßt sich auf jede Anzahl gleicher Verhältnisse ausdehnen. Hat man nämlich irgend eine Anzahl gleicher Verhältnisse; so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie sich ein Vorderglied zu seinem Hinterglied verhält.

Denn ist q der Exponent eines dieser Verhältnisse; so wird der Exponent aller übrigen auch q seyn. Wenn demnach die Hinterglieder dieser Verhältnisse a, b, c, d, e, f, ... sind, so werden ihre Vorderglieder aq, bq, cq, dq, eq, fq . . . . . . seyn. Die Summe aller Vorderglieder ist also $aq + bq + cq + dq + eq + fq \ldots\ldots = q(a + b + c + d + e + f \ldots)$; und der Exponent des Verhältnisses der Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder ist q; einerley mit dem Exponenten eines der ersten Verhältnisse.

Diese Anmerkung enthält den Grund der sogenannten GesellschaftsRegel, nach welcher, wenn man die einzelnen Einlagen irgend einer Anzahl von GesellschaftsMitgliedern,

und den der ganzen Gesellschaft zukommenden Gewinn kennt, der Gewinn eines jeden Mitglieds bestimmt wird.

Denn das Verhältniß jeder Einlage zu dem ihr zukommenden Gewinn ist das nämliche. Man hat also eine Reihe von gleichen Verhältnissen; deren Vorderglieder die einzelne Einlagen, und die Hinterglieder die einzelne Gewinne sind. Man kann also schliessen: die bekannte Summe aller Einlagen verhält sich zu der bekannten Summe aller Gewinne, wie eine Einlage zu dem ihr zukommenden Gewinn; und man findet jeden einzelnen Gewinn durch Wiederholung dieser einfachen Regel de tri.

Allgemein und abstract ausgedrükt lehrt die Gesellschafts Regel Größen in gegebener Anzahl zu finden, deren Summe und Verhältnisse bekannt sind.

Beyspiel. Vier Personen treten in Gesellschaft, und legen folgende Summen ein: 4000, 5000, 6000, 7000 Gulden. Sie gewinnen damit 3300 Gulden. Welches ist der Antheil jeder an diesem Gewinn?

Man bezeichne ihre einzelnen Gewinne durch g, g', g'', g'''; so hat man die Reihe gleicher Verhältnisse.

$$4000 : g = 5000 : g' = 6000 : g'' = 7000 : g'''$$

folglich $$22000 : g+g'+g''+g''' = \begin{cases} 4000 : g \\ 5000 : g' \\ 6000 : g'' \\ 7000 : g''' \end{cases}$$

Oder $$22000 : 3300 = \begin{cases} 4000 : g \\ 5000 : g' \\ 6000 : g'' \\ 7000 : g''' \end{cases}$$ Also $$\begin{aligned} g &= 600 \\ g' &= 750 \\ g'' &= 900 \\ g''' &= 1050 \\ \hline g+g'+g''+g''' &= 3300. \end{aligned}$$

§. 47.

Lehrsaz. Es seyen zwey Proportionen $\begin{cases} a:b=c:d \\ a':b'=c':d' \end{cases}$ Multiplicirt man die correspondirenden Glieder derselben miteinander; so machen auch die Producte aa', bb', cc', dd' eine Proportion.

Beweis. Die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, welche die Exponenten der Verhältnisse der ersten Proportion sind, sind gleich; und so auch die Brüche $\frac{a'}{b'}$ und $\frac{c'}{d'}$, welche die Exponenten der zweyten Proportion sind. Man hat also die zwey Gleichungen $\begin{cases} \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \\ \frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'} \end{cases}$. Das Product der Brüche, welche die ersten Glieder dieser Gleichungen ausmachen, ist mithin dem Product der Brüche gleich, welche die zweyten Glieder dieser Gleichungen ausmachen: oder es ist $\frac{aa'}{bb'}=\frac{cc'}{dd'}$. Durch Verwandlung dieser Gleichung in eine Proportion hat man also $aa':bb'=cc':dd'$.

Die Glieder dieser Proportion entstehen aus den Producten der Exponenten der Verhältnisse der zwey ersten Proportionen; und man sagt, die Verhältnisse, aus welchen diese Proportion besteht, seyen aus den Verhältnissen der zwey ersten Proportionen zusammengesezt *).

Eben so beweißt man: daß, wenn man 3, 4, 5 ... Proportionen hat, und derselben correspondirende Glieder mit einander multiplicirt; die Producte ebenfals eine Proportion ausmachen. Demnach ist das aus allen ersten Verhältnissen einer jeden Proportion zusammengesezte Verhält-

*) Es ist wohl zu bemerken, daß sich dieses auf in Zahlen ausgedrükte Proportionen beziehet. Sonst muß die Lehre von Zusammensezung der Verhältnisse auf eine andere Art dargestellt werden; wie dies besonders in der Geometrie der Fall ist.

niß dem aus allen zweyten Verhältnissen der nämlichen Proportionen zusammengesezten Verhältnisse gleich. Hat man folglich irgend eine Anzahl von Verhältnissen, die jedes für sich einem von einer gleichen Anzahl Verhältnisse gleich sind; so ist das aus den ersten Verhältnissen zusammengesezte Verhältniß dem aus den andern zusammengesezten gleich.

Hierauf gründet sich das in der Arithmetik unter dem Namen der Kettenregel bekannte Verfahren; wovon unter andern die zusammengesezte Wechsel oder Arbitragen abhängen. Durch diese Operation bestimmt man das zwischen zwey Größen statthabende Verhältniß, wenn man entweder ihre Verhältnisse zu einer und derselben Mittelgröße, oder ihre Verhältnisse zu solchen Mittelgrößen kennt, deren Verhältnisse bekannt sind. Ich will dieses durch einige Beyspiele erläutern.

Man weiß das Verhältniß der Pariser Elle zur Genuesischen Palme nicht. Man weiß aber, daß 7 Pariser Ellen 9 englische Stäbe; und 15 englische Stäbe 56 genuesische Palmen machen. Wie verhält sich diesemnach die Pariser Elle zu der genuesischen Palme?

Weil 7 Pariser Ellen 9 englische Stäbe machen; so betragen 7×15 Pariser Ellen, 9×15 englische Stäbe.

Da nun 15 englische Ellen 56 genuesische Palmen machen; so betragen 9×15 englische Stäbe, 9×56 genuesische Palmen. Man hat also zwey Ausdrücke für den Werth von 9×15 englischen Stäben; nämlich einerseits 7×15 Pariser Ellen, und andererseits 9×56 genuesische Palmen. 7×15 Pariser Ellen machen daher 9×56 genuesische Palmen; oder 5 Pariser Ellen machen 24 genuesische Palmen.

Man bezeichne Kürze halber, die Pariser Elle, den englischen Stab, und die genuesische Palme durch P, A, G.

Weil $7P = 9A$; so ist $P : A = 9 : 7$
und weil $15A = 56G$; so ist $A : G = 56 : 15$.

$$\begin{aligned}\text{Folglich } A\times P : A\times G \\ \text{oder } P : G\end{aligned}\Bigg\} = 9\times 56 : 7\times 15$$
$$= 3\times 8 : \quad 5 = 24 : 5$$
$$\text{oder } 5P = 24G.$$

Aus den zwey Proportionen $\left\{\begin{matrix} P : A = 9 : 7 \\ A : G = 56 : 15 \end{matrix}\right.$, wo das Hinterglied des ersten Verhältnisses der ersten dem Vorderglied des ersten Verhältnisses der zweyten gleich ist, folgt demnach: das erste Vorderglied der ersten Proportion, verhalte sich zu dem ersten Hinterglied der zweyten, wie das Product der zweyten Vorderglieder zu dem Product der zweyten Hinterglieder dieser Proportiouen.

Zweytes Beyspiel. Angenommen, daß ein alter Louisd'or zu Berlin 5 und $\frac{1}{3}$ Thaler (oder 5 Thaler und 8 Groschen), und ein Ducate 3 Thaler gelte: wie verhält sich der Louisd'or zum Ducaten?

Weil ein Louisd'or $5\frac{1}{3}$ Thaler gilt:
so gelten 3 Louisd'or 16 Thaler;
und 9 Louisd'or gelten 48 Thaler.

Da nun 3 Thaler einen Ducaten machen;
und 48 Thaler 16 Ducaten:
so gelten 9 Louisd'or 16 Ducaten.

L, T, D, bezeichnen die Werthe eines Louisd'or, Thalers, Ducaten:

Weil 1 $L = 5\frac{1}{3}T$; so ist $L : T = 5\frac{1}{3} : 1 = 16 : 3$
und weil 1 $D = 3\ T$; so ist $T : D = \quad 1 : 3$

$$\begin{aligned}\text{Demnach } L\times T : T\times D \\ \text{oder } L : D\end{aligned}\Bigg\} = 16 : 9$$

Drittes Beyspiel. Angenommen, daß 5 Ducaten 26 holländische CurantGulden; 105 holländische CurantGulden, 100 BancoGulden; 5 BancoGulden, 2 holländische Thaler; und 100 holländische Thaler, 133 sächsische Thaler machen: wie verhält sich der Ducate zu dem sächsischen Thaler?

Die Werthe eines Ducaten, eines holländischen Curant Guldens, eines Banco Guldens, eines Banco Thalers, und eines sächsischen Thalers seyen D, Gc, Gb, Tb, Ts.

Weil $5D = 26Gc$; so ist $D : Gc = 26 : 5$
$105Gc = 100Gb$; $Gc : Gb = 100 : 105$
$5Gb = 2Tb$ $Gb : Tb = 2 : 5$
$100Tb = 133Ts$ $Tb : Ts = 133 : 100$.

Folglich $D : Ts = 26 \times 100 \times 2 \times 133 : 5 \times 105 \times 5 \times 100$
$= 26 \times 2 \times 19 : 5 \times 15 \times 5$
$= 988 : 375$.

Folglich $375D = 988 \times Ts$.

Oder 375 Ducaten machen 988 sächsische Thaler.

Wenn nämlich das Vorderglied des ersten Verhältnisses jeder Proportion nach der ersten, dem Hinterglied des ersten Verhältnisses der unmittelbar vorhergehenden Proportion, gleich ist; so verhält sich das Vorderglied des ersten Verhältnisses der ersten Proportion zu dem Hinterglied des ersten Verhältnisses der lezten Proportion, wie das Product aller Vorderglieder der zweyten Verhältnisse zu dem Product aller ihrer Hinterglieder.

§. 48.

Der seiner vielen Anwendungen wegen wichtigste Fall der Zusammensezung von Verhältnissen ist der, wenn alle zusammenzusezende Verhältnisse einander gleich sind. Ist in diesem Fall die Anzahl der zusammenzusezenden Verhältnisse 2, 3, 4, 5, 6, ... n; so sagt man: das daraus zusammen gesezte Verhältniß seye das duplicirte, triplicirte, quadruplicirte, quintuplicirte, sextuplicirte, ... n cuplirte von einem derselben. Sind nicht nur die zusammenzusezende Verhältnisse gleich, sondern auch ihre Glieder die nämlichen; so sind die Glieder des zusammengesezten Verhältnisses, die Glieder einer der zusammenzusezenden Verhältnisse zweymal, dreymal, viermal, fünfmal, sechsmal .... nmal als Factoren genommen.

Definition. Das Resultat der Multiplication einer etlichemal als Factor genommenen Zahl heißt eine **Potenz** dieser Zahl: und zwar die zweyte, dritte, vierte, fünfte, ... nte Potenz, je nachdem diese Zahl zwey, drey, vier, fünf, ... nmal als Factor genommen wird. So heissen die Größen aa, aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa, ... die zweyte, dritte, vierte, fünfte, sechste..... Potenz der Zahl a; und Kürze halber bezeichnet man diese Potenzen folgendermaassen:

$$a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6.$$

Die hinten oberhalb beygeschriebene Zahlen zeigen an, wie vielmal a als Factor genommen worden ist; und heissen die **Exponenten** der Potenzen. Im allgemeinen bedeutet der Ausdruk a^n, daß a soll nmal als Factor genommen werden; und heißt die nte Potenz von a.

Das zwischen einerley Potenzen zweyer Zahlen statt habende Verhältniß ist also aus soviel dem der zwey Zahlen gleichen Verhältnissen zusammen gesezt, als der Exponent dieser Potenzen Einheiten enthält. So sind die Verhältnisse a^2 zu b^2, a^3 zu b^3, a^4 zu b^4, a^5 zu b^5..... und überhaupt wenn n eine ganze positive Zahl ist, a^n zu b^n, aus zwey, drey, vier, fünf.....n, dem von a zu b gleichen Verhältnissen zusammen gesezt. Und sind zwey Verhältnisse gleich; so sind auch die Verhältnisse der gleichnamigen Potenzen ihrer Glieder einander gleich: nämlich wenn $a:b=c:d$; so ist $a^n:b^n=c^n:d^n$.

Wir werden Gelegenheit haben, in der Folge auf diese Lehre zurükzukommen. Ich gehe nun zu einigen auf geometrische Verhältnisse und Proportionen sich beziehende Aufgaben über; und fange damit an, einige von den in dem ersten Capitel aufgelösten Fragen unter diesem Gesichtspunct zu betrachten.

§. 49.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden, deren Summe oder Differenz, und deren Verhältniß gegeben sind.

Diese Aufgabe kommt mit den in §§ 2 und 4 aufgelösten überein.

Das gegebene Verhältniß sey das von m zu n.

Erste Frage. Die gegebene Summe sey s; und die gesuchte Zahlen seyen x, y.

Bed. Weil $x:y=m:n$; so ist

Red. $x+y:y=m+n:n$ Oder $m+n:n=s:y$
$x+y:x=m+n:m$ $m+n:m=s:x.$

Aufl. $y=s\times\frac{n}{m+n}$

$x=s\times\frac{m}{m+n}.$

Zweyte Frage. Die gegebene Differenz sey d; und die gesuchte Zahlen seyen x, y.

Bed. $x:y=m:n.$

Red. 1. Fall. Es sey $m=n$: so wird $x=y$; die gegebene Differenz d muß also Null seyn, und die Aufgabe ist unbestimmt.

2. Fall. Es sey $m>n$, also $x>y$, folglich

Red. $x-y:y=m-n:n$ Oder $m-n:n=d:y$
$x-y:x=m-n:m$ $m-n;m=d:x.$

Aufl. $y=d\times\frac{n}{m-n}$

$x=d\times\frac{m}{m-n}.$

3. Fall. Es sey $m<n$: so erhält man auf die nämliche Art $y=d\times\frac{n}{n-m}$

$x=d\times\frac{m}{n-m}.$

Anmerkung. Will man die Formeln des zweyten Falls auf den ersten anwenden: so findet man $\begin{cases} y = d \times \frac{n}{o} \\ x = d \times \frac{m}{o} \end{cases}$, welches Unmöglichkeit anzeigt, wenn nicht zugleich $d = o$ ist; in welchem Fall die Unbestimmtheit der Frage durch die Bezeichnung $\frac{o}{o}$ angedeutet wird.

§ 50.

Aufgabe. Eine Zahl finden, die man zu zwey gegebenen Zahlen a und b addiren muß, damit ihr Verhältniß dem gegebenen Verhältniß m zu n gleich werde.

Ben. Gesuchte Zahl x.
vermehrte Zahlen $\begin{cases} a + x \\ b + x. \end{cases}$

Bed. $a + x : b + x = m : n.$

Red. Erster Fall. Es sey $m = n$: so wird auch $a + x = b + x$; welches unmöglich ist, wenn man nicht auch $a = b$ hat.

Zweyter Fall. Es sey $m > n$; folglich auch $a + x > b + x$; $a > b$: und demnach

$$a - b : b + x = m - n : n;\ b + x = (a - b)\frac{n}{m-n} = a\frac{n}{m-n} - b\frac{n}{m-n}$$

$$a - b : a + x = m - n : m;\ a + x = (a - b)\frac{m}{m-n} = a\frac{m}{m-n} - b\frac{m}{m-n}.$$

$$x = a\frac{n}{m-n} - b\left(\frac{n}{m-n} + 1\right) = a\frac{n}{m-n} - b\frac{m}{m-n}.$$

Oder $x = a\left(\frac{m}{m-n} - 1\right) - b\frac{m}{m-n} = a\frac{n}{m-n} - b\frac{m}{m-n}.$

Dritter Fall. Es sey $m < n$; folglich auch $a + x < b + x$; $a < b$: so findet man

$$b+x=b\frac{n}{n-m}-a\frac{n}{n-m}$$

$$a+x=b\frac{m}{n-m}-a\frac{m}{n-m}.$$

1. Anmerkung. Wendet man die Formeln des zweyten Falls auf den ersten an; so bekommt man $x=\frac{a-b}{0}$: welches Unmöglichkeit anzeigt, wenn nicht zugleich $a=b$ ist; in welchem Fall $x=\frac{0}{0}$ unbestimmt wird.

2. Anmerkung. Wenn, für $m>n$, $bm>an$ ist: so verändert die Größe x ihr Zeichen; und man löst die Aufgabe auf: Eine Zahl finden, die man von zwey gegebenen Zahlen abziehen muß, damit das Verhältniß der Ueberreste einem gegebenen Verhältniß gleich sey.

§ 51.

Aufgabe. Die Zahl finden, von welcher man zwey gegebene Zahlen a und b abziehen muß, damit das Verhältniß der Reste dem gegebenen Verhältniß m zu n gleich sey.

Die gesuchte Zahl sey x.

Bed. $x-a:x-b=m:n.$

Erster Fall. Es sey $m=n$: so muß auch $x-a=x-b$; und $a=b$ seyn.

Zweyter Fall. Es sey $m>n$; $b-a:x-b=m-n:n$
$b-a:x-a=m-n:m$

Folglich

$$x-b=(b-a)\frac{n}{m-n}=b\times\frac{n}{m-n}-a\frac{n}{m-n};\ x=b\times\frac{m}{m-n}-a\times\frac{n}{m-n}$$

$$x-a=(b-a)\frac{m}{m-n}=b\times\frac{m}{m-n}-a\frac{m}{m-n};\ x=b\times\frac{m}{m-n}-a\times\frac{n}{m-n}.$$

Diese Aufgabe ist demnach sehr nahe mit der vorhergehenden verwandt; da die ihnen entsprechende Werthe von x sich nur durch das Zeichen von einander unterscheiden.

Dritter Fall. Es sey $m < n$; so findet man

$$x - b = a \times \frac{n}{n-m} - b \times \frac{n}{n-m}$$

$$x - a = a \times \frac{m}{n-m} - b \times \frac{m}{n-m}.$$

§. 52.

Aufgabe. Die Zahl finden, die man einer gegebenen Zahl a zusezen, und von einer gegebenen Zahl b abziehen muß, damit das Verhältniß der Summe und des Rests dem gegebenen Verhältniß m zu n gleich sey.

Ben. Die gesuchte Zahl sey x.

Bed. $a + x : b - x = m : n$.

Red. $a + b : b - x = m + n : n$; $b - x = (a + b)\frac{n}{m+n}$

$a + b : a + x = m + n : m$; $a + x = (a + b)\frac{m}{m+n}$

$$x = b\left(1 - \frac{n}{m+n}\right) - a\frac{n}{m+n} = b\frac{m}{m+n} - a\frac{n}{m+n}$$

$$x = b\frac{m}{m+n} - a\left(1 - \frac{m}{m+n}\right) = b\frac{m}{m+n} - a\frac{n}{m+n}.$$

§. 53.

Aufgabe. Zwey gegebene Zahlen a und b jede in zwey Theile theilen: so daß das Verhältniß eines Theils von a zu einem Theil von b dem gegebenen Verhältniß m zu n; und das Verhältniß des andern Theils von a zu dem andern Theil von b dem gegebenen Verhältniß m' zu n' gleich sey.

Ben. Erster Theil von a x

Zweyter Theil von a . . . . . $a - x$

Erster Theil von b . . . . . $\frac{n}{m}x$

Zweyter Theil von b . . . . $b - \frac{n}{m}x$.

Bed. $a-x:b-\frac{n}{m}x=m':n'$

Red. $a-x:\frac{m}{n}b-x=m':n'\times\frac{m}{n}$.

So ist die vorgelegte Aufgabe auf die § 50 Anmerk. 2. zurükgeführt: Die Zahl x finden, welche man von zwey gegebenen Zahlen a und $\frac{m}{n}b$ abziehen muß, damit das Verhältniß der Reste dem gegebenen Verhältniß m' zu $n'\times\frac{m}{n}$ gleich sey.

Anmerkung. Es sey $m'=n'\times\frac{m}{n}$: so ist die Aufgabe unbestimmt, wenn $a=\frac{m}{n}b$; und unmöglich, wenn diese zwey Gleichungen nicht zugleich statt haben.

Nimmt man $m'>n'\times\frac{m}{n}$ an: so muß man, um die Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage aufzulösen, $a>\frac{m}{n}b$ haben; und alsdenn findet man

$$a-x=\left(a-\frac{m}{n}b\right)\frac{m'}{m'-n'\times\frac{m}{n}}$$

$$x=\frac{m}{n}b\times\frac{m'}{m'-n'\times\frac{m}{n}}-a\times\frac{n'\times\frac{m}{n}}{m'-n'\times\frac{m}{n}}$$

Die Aufgabe ist also nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage aufgelöst, wenn zugleich $\begin{cases}a<\frac{m'}{n'}b\\a>\frac{m}{n}b\end{cases}$ ist.

Ist $\begin{cases}a<\frac{m'}{n'}b\\a<\frac{m}{n}b\end{cases}$: so verändert $a-x$, der zweyte Theil von a sein Zeichen; und a, statt die Summe von a und $a-x$ zu seyn, wird die Differenz von x und

x—a, nämlich der Ueberschuß des ersten Theils über den zweyten.

Ist $\left\{\begin{array}{l} a > \frac{m'}{n'} b \\ a > \frac{m}{n} b \end{array}\right.$: so verändert der erste Theil von a sein Zeichen; und die Größe a wird der Ueberschuß von a+x über x.

§. 54.

Ich will an einem aus **Newtons allgemeiner Arithmetik** entlehnten Beyspiele zeigen, wie man verwikeltere Aufgaben durch ihre Zerlegung auf einfache, dergleichen die oben aufgelöste sind, reduciren kann.

Aufgabe. Eine gegebene Anzahl b Ochsen hat während der gegebenen Zeit t das Gras einer Wiese p verzehrt, worauf solches vor ihrem Eintritt eine gewisse Höhe hatte, und nach demselben gleichförmig zu wachsen fortfuhr.

Eine andere gegebene Anzahl b' Ochsen, die eben so viel fressen als die erste, haben in der gegebenen Zeit t' das Gras einer Wiese p' verzehrt, worauf solches vor ihrem Eintritt gleich hoch, wie auf der ersten, stund, und nachher gleichförmig zu wachsen fortfuhr.

Man sucht die Anzahl b'' Ochsen, welche eine dritte, den ersten ähnliche Wiese p'' in der gegebenen Zeit t'' abweyden.

Untersuchung. Man kann sich jede der zwey Anzahlen b, b' der Ochsen, welche das Gras der Wiesen p und p' während der Zeiten t, t' verzehren, in zwey Theile getheilt vorstellen. Die ersten Theile verzehrten das Gras, das sie beym Eintritt auf jenen Wiesen finden: und diese Theile sind in directem Verhältniß *) der Größe der Wie-

*) Man sagt: zwey Größen seyen einander direct proportionirt, wenn die eine in dem nämlichen Verhältniß wächst

sen, und in umgekehrtem Verhältniß der Zeiten, in welchen sie dieselben abweyden. Die zweyten Theile verzehrten das von ihrem Eintritt an beständig nachwachsende Gras: und diese wären in dem zusammengesezten Verhältniß aus dem directen des abzuweydenden Grases, und dem umgekehrten der hiezu gebrauchten Zeit. Nun ist aber das Gras, welches diese zweyte Abtheilungen von Ochsen abzuweyden haben, in zusammengeseztem Verhältniß der Größe der Wiesen, und der Zeiten, während welcher das Gras darauf wächst. Folglich sind jene zweyten Theile in einfachem directem Verhältniß der Größe der Wiesen.

Man hat also vorläufig folgende Aufgabe aufzulösen: Jede der zwey gegebenen Größen b, b' in zwey Theile theilen, so daß ein Theil von b zu einem Theil von b' das gegebene Verhältniß $\frac{p}{t}$ zu $\frac{p'}{t'}$; und der andere Theil von b zu dem andern Theil von b' das gegebene Verhältniß p zu p' habe.

Nach dem vorigen §. ergeben sich

---

wie die andere; so daß, wenn eine das doppelte, dreyfache, vierfache ..... von sich selbst wird, auch die andere zu gleicher Zeit das doppelte, dreyfache, vierfache ..... von sich selbst wird. So ist die Arbeit, welche gleich fleissige und einerley Zeit hindurch arbeitende Personen zu Stande bringen, der Anzahl dieser Arbeiter proportional; und ein Bruch, der eine beständige Größe zum Nenner hat, ist seinem Zähler proportional. Hingegen heissen zwey Größen umgekehrt proportional, wenn die eine in dem nämlichen Verhältniß abnimmt, wie die andere wächst; so daß, indem die eine das doppelte, dreyfache, vierfache ..... von sich selbst wird, die andere die Hälfte, das Drittel, das Viertel ..... von sich selbst wird. So ist die Zeit, welche gleich fleissige Arbeiter zu einerley Arbeit gebrauchen, der Anzahl der Arbeiter umgekehrt proportional; und ein Bruch, der eine beständige Größe zum Zähler hat, steht in dem umgekehrten Verhältniß seines Nenners.

Erster Theil von b.... $b' \times \frac{p}{p'} \times \frac{t}{t-t'} - b \times \frac{t'}{t-t'}$

Zweyter Theil von b.... $b \times \frac{t}{t-t'} - b' \times \frac{p}{p'} \times \frac{t'}{t-t'}$

Erster Theil von b'.... $b' \times \frac{t}{t-t'} - b \times \frac{p'}{p} \times \frac{t}{t-t'}$

Zweyter Theil von b'.... $b \times \frac{p'}{p} \times \frac{t}{t-t'} - b' \times \frac{t'}{t-t'}$.

Dieß vorausgeschikt, gehe ich nun zu der Hauptaufgabe über: die Zahl der Ochsen b'' finden, welche die Wiese p'' in der Zeit t'' abweyden.

Ich stelle mir wieder die gesuchte Anzahl b'' der Ochsen in zwey Theile zerlegt, vor: deren einer das Gras verzehrt, was sie bey ihrem Eintritt auf der Wiese finden; der andere aber dasjenige verzehrt, was nach ihrem Eintritt gleichförmig zuwächst.

Den ersten Theil zu finden, mache ich die Proportion:

$$\frac{p}{t} : \frac{p''}{t''} = b' \times \frac{p}{p'} \times \frac{t'}{t-t'} - b \times \frac{t'}{t-t'} : b' \times \frac{p''}{p'} \times \frac{t}{t''} \times \frac{t'}{t-t'} - b \times \frac{p''}{p} \times \frac{t}{t''} \times \frac{t'}{t-t'}$$

Den zweyten Theil finde ich durch die Proportion:

$$p : p'' = b \times \frac{t}{t-t'} - b' \times \frac{p}{p'} \times \frac{t'}{t-t'} : b \times \frac{p''}{p} \times \frac{t}{t-t'} - b' \times \frac{p''}{p'} \times \frac{t'}{t-t'}$$

Die gesuchte Anzahl Ochsen ist nun die Summe der vierten Glieder dieser zwey Proportionen, nämlich

$$b'' = b \times \frac{p''}{p} \times \frac{t}{t-t'} \times \frac{t''-t'}{t''} - b' \times \frac{p''}{p'} \times \frac{t'}{t-t'} \times \frac{t''-t}{t''}$$
$$= b \times \frac{p''}{p} \times \frac{t}{t''} \times \frac{t''-t'}{t-t'} - b' \times \frac{p''}{p'} \times \frac{t'}{t''} \times \frac{t''-t}{t-t'}$$
$$= b' \times \frac{p''}{p'} \times \frac{t'}{t''} \times \frac{t-t''}{t-t'} - b \times \frac{p''}{p} \times \frac{t}{t''} \times \frac{t'-t''}{t-t'}.$$

Beyspiel. Es sey $b = 12$ $p = 10$ $t = 4$
$b' = 21$ $p' = 30$ $t' = 9$
$p'' = 72$ $t'' = 18$:

so findet man $b'' = 36$; welches mit dem Beyspiel der XI.

Aufgabe in Newtons Allgemeiner Arithmetik überein-stimmt.

1. Anmerkung. Für $t=t'$, ist die Aufgabe unmöglich, wenn nicht zugleich $\frac{b'}{p'}=\frac{b}{p}$, oder $\frac{b'}{b}=\frac{p'}{p}$ ist, in welchem Fall die Aufgabe unbestimmt ist.

2. Anmerkung.

Die Gleichung $b''=b'\times\frac{p''}{p'}\times\frac{t'}{t''}\times\frac{t-t''}{t-t'}-b\times\frac{p''}{p}\times\frac{t}{t''}\times\frac{t-t''}{t-t'}$ läßt sich auch unter folgender symmetrischer Form darstellen:

$$b''\times t''\times(t-t')\times\frac{1}{p''}=b'\times t'\times(t-t'')\times\frac{1}{p'}-b\times t\times(t'-t'')\times\frac{1}{p}.$$

Sind in dieser Gleichung von den neun Größen

$$\begin{array}{ccc} b, & b', & b'' \\ p, & p', & p'' \\ t, & t', & t'' \end{array}$$

acht gegeben; so kann man die neunte bestimmen. So erhält man: $\frac{1}{p''}=\frac{b'}{b''}\times\frac{t'}{t''}\times\frac{t-t''}{t-t'}\times\frac{1}{p'}-\frac{b}{b''}\times\frac{t}{t''}\times\frac{t'-t''}{t-t'}\times\frac{1}{p}$.

Die bisherigen Beyspiele zeigen hinlänglich, wie man sich der Theorie der Verhältnisse zu Auflösung von Aufgaben bedienen könne, die unter einem andern Gesichtspunkt im ersten Capitel aufgelöst worden sind. Ich gehe nun zu neuen auf Proportionen sich beziehenden Aufgaben über.

§. 55.

Aufgabe. Es sind vier Zahlen gegeben; man soll die Zahl finden, die man zu jeder derselben addiren muß, damit die Summen in einer geometrischen Proportion stehen.

Die vier gegebene Zahlen seyen a, b, c, d.

Ben. Gesuchte Zahl . . . x.

Bed. $a+x:b+x=c+x:d+x$.

Erster Fall. Es sey $c = d$:

folglich auch $c + x = d + x$

$$a + x = b + x$$

$a = b$ und die Aufgabe ist unbestimmt.

Zweyter Fall. Es sey $c > d$: so folgt

$$a - b : b + x = c - d : d + x$$

$$a - b : a + x = c - d : c + x$$

1.) Es sey $a - b = c - d$: folglich auch $\begin{matrix} b + x = d + x \\ a + x = c + x \end{matrix}$;

demnach $\begin{matrix} b = d \\ a = c \end{matrix}$ und die Aufgabe ist unbestimmt.

2.) Es sey $a - b > c - d$: so folgt

$$a - b - c + d : b - d \begin{cases} = a - b : b + x \\ = c - d : d + x \end{cases}$$

$$a - b - c + d : a - c \begin{cases} = a - b : a + x \\ = c - d : c + x. \end{cases}$$

Also $b + x = \frac{(a-b)(b-d)}{a-b-c+d}$

$$d + x = \frac{(b-d)(c-d)}{a-b-c+d}$$

$$a + x = \frac{(a-b)(a-c)}{a-b-c+d} \qquad x = \frac{bc - ad}{a-b-c+d}$$

$$c + x = \frac{(a-c)(c-d)}{a-b-c+d}.$$

Zusaz. Hat man zugleich $\begin{cases} a + d > b + c \\ bc > ad \end{cases}$; so ist die Aufgabe in dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage aufgelöst.

Sind zugleich $\begin{cases} a + d = b + c \\ ad = bc \end{cases}$; so ist die Aufgabe unbestimmt: und sie ist unmöglich, wenn die zweyte Gleichung nicht zugleich mit der ersten statt findet.

Nämlich wenn $ad = bc$; also $4ad = 4bc$
und $a+d = b+c$; $(a+d)^2 = (b+c)^2$
so ist $(a-d)^2 = (b-c)^2$

Man hat daher eine der folgenden Gleichungen

$$a-d=b-c$$
$$a-d=c-b$$
$$d-a=b-c$$
$$d-a=c-b.$$

Verbindet man diese Gleichungen mit der Gleichung $a+d=b+c$: so erhält man aus
der ersten $a=b$, $d=c$
" zweyten $a=c$, $d=b$
" dritten $a=c$, $d=b$
" vierten $a=b$, $d=c$.

Die obige vier Gleichungen reduciren sich also auf die zwey $a-d=\begin{cases}b-c\\c-b\end{cases}$; woraus hergeleitet wird $a=\begin{cases}b\\c\end{cases}$, $d=\begin{cases}c\\b\end{cases}$.

Hat man zugleich $\begin{cases}a+d > b+c\\ ad > bc\end{cases}$; so verändert der Werth von x sein Zeichen, und entspricht der Aufgabe: die Zahl finden, die man von vier gegebenen Zahlen abziehen muß, damit die Reste in einer geometrischen Proportion stehen.

Haben, unter der Voraussezung daß $a+d > b+c$, die Factoren $a-b$, $b-d$; $b-d$, $c-d$; $a-b$, $a-c$; $a-c$, $c-d$; je zwey und zwey gleiche Zeichen vor sich; so sind die Glieder der vorliegenden Proportion positiv: Hat aber dies nicht statt, so verändern sie ihre Zeichen.

1. Anmerkung. Eben diese Bemerkungen lassen sich auf den Fall $a+d<b+c$ anwenden; in welchem der Werth von x $\frac{ad-bc}{-a+b+c-d}$ wird.

2. Anmerkung. Auf die nämliche Art würde folgende Aufgabe aufgelöst werden: die Zahl x finden, wovon, wenn man jede der vier gegebenen Zahlen a, b, c, d abzieht, die Reste geometrisch proportional sind. Die Formeln für diesen Fall können auch aus denen für die vorhergehende Aufgabe hergeleitet werden, indem man in diesen die Zeichen der gegebenen Größen a, b, c, d, ändert. So erhält man $x=\frac{bc-ad}{-a+b+c-d}=\frac{ad-bc}{a-b-c+d}$. Und eben so lassen sich daraus die Formeln für die Fälle herleiten, in welchen die gegebene Größen zu der gesuchten Größe theils addirt, theils von ihr subtrahirt würden.

3. Anmerkung. Damit die Aufgabe möglich seye; darf, wie wir gesehen haben, nicht $a+d=b+c$ seyn; wenn nicht zugleich $a=\begin{cases}b\\c\end{cases}$, $d=\begin{cases}c\\b\end{cases}$ ist. Dis belehrt uns, daß, wenn in einer geometrischen Proportion eines der äußern Glieder einem der mittleren nicht gleich ist, folglich auch das andere mittlere dem andern äußern Glied nicht gleich ist, die Summe der äußern Glieder der Summe der mittleren nicht gleich sey.

Es sey die Proportion $a:b=c:d$; es sey $\begin{cases}a>b\\a>c\end{cases}$ folglich $\begin{cases}d<c\\d<b\end{cases}$: so wird $a+d>b+c$ seyn.

Denn weil $a:b = c:d$
so ist $a-b:a = c-d:c$.
Aber $a>c$ folglich $a-b>c-d$
oder $a+d>b+c$.

Demnach ist in jeder geometrischen Proportion die Summe des grösten und kleinsten Glieds grösser als die Summe der beyden andern.

§. 56.

Aufgabe. Es ist ein Rectangel gegeben: welches ist die Seite eines Quadrats, dessen Umfang sich zu dem Umfang des Rectangels verhält, wie die Fläche des Quadrats zur Fläche des Rectangels?

a, b seyen die Seiten des Rectangels; und c sey die Seite des Quadrats. Der halbe Umfang des Rectangels ist a+b; und der halbe Umfang des Quadrats ist 2c. Die Fläche des Rechteks ist ab; und die Fläche des Quadrats ist cc. Man muß also die Proportion haben:

$$a+b:2c = ab:cc.$$

Folglich $ab:cc = \frac{a+b}{2}:c = \frac{a+b}{2}c:cc$

Also $ab = \frac{a+b}{2}c$

$$\frac{a+b}{2}:a = b:c;\ \text{oder}\ c = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}}.$$

Das heißt: die Seite des Quadrats ist die vierte ProportionalLinie zu der halben Summe der Seiten des Rectangels und zu jeder dieser Seiten.

Anmerkung. Die Gleichung $ab = \frac{a+b}{2}c$ dient, jede der drey Größen a, b, c durch die zwey andern zu bestimmen. Z. E. sind b und c gegeben: so wird $a(b-\frac{1}{2}c) = \frac{bc}{2}$; und $a = \frac{bc}{2b-2}$.

Zusaz. Ist ein Quadrat gegeben; so kann man soviel Rectangel finden, als man will, deren Flächen sich wie ihre Perimeter verhalten.

§ 57.

Aufgabe. Die drey Seiten eines rechtwinklichen Parallelepipedum sind gegeben. Welches ist die Seite des Würfels, dessen Oberfläche sich zu der des Parallelepipedum verhält wie der körperliche Inhalt des Würfels zu dem körperlichen Inhalt des Parallelepipedum *).

Die Seiten des Parallelepipedum seyen a, b, h.

Die gesuchte Seite des Würfels sey c.

Halbe Oberfläche des Parallelepipedum . . $ab+ah+bh$
Halbe Oberfläche des Würfels . . . . . $3cc$
Körperlicher Inhalt des Parallelepipedum . . . abh
Körperlicher Inhalt des Würfels . . . . . c^3

Bed. $abh : c^3 = ab+ah+bh : 3cc.$

Red. $abh : c^3 = (ab+ah+bh)c : 3c^3$

$$= \frac{ab+ah+bh}{3} c : c^3$$

Also $\frac{ab+ah+bh}{3} \times c = abh;$ $\quad c = \frac{abh}{\frac{ab+ah+bh}{3}}$

---

*) Es ist aus den Anfangsgründen der Geometrie bekannt: daß der körperliche Inhalt eines rechtwinklichen Parallelepipedum, dessen drey Seiten in Zahlen angegeben sind, berechnet wird, indem man diese drey Zahlen in einander multiplicirt; oder indem man die Zahl, welche die Größe der Grundfläche ausdrükt, durch die Zahl, welche die Länge der Höhe angiebt, multiplicirt. Die Seiten der Grundfläche eines rechtwinklichen Parallelepipedum seyen z. B. 5 und 6 Schuh; so ist seine Grundfläche 30 Quadratschuh. Wäre nun die Höhe des Parallelepipedum ein Schuh: so liesse es sich in soviel Cubikschuh zerlegen, als die Grundfläche Quadratschuh enthält; nämlich in 30. Und wenn die Höhe 7 Schuh ist: so kann es in 7 einen Schuh hohe Parallelepipeden zerlegt werden, deren jedes 30 Cubikschuh enthält: Es wird also $5 \times 6 \times 7$ oder 210 Cubikschuh betragen.

Die Gleichung $abh = \frac{ab+ah+bh}{3} \times c$ dient jede der vier Grössen a, b, h, c durch drey derselben zu bestimmen. Insbesondere kann man, wenn zwey Seiten des rechtwinklichten Parallelepipedum, und die Seite des Würfels gegeben sind, die dritte Seite des Parallelepipedum so bestimmen, daß sein körperlicher Inhalt zu dem des Würfels sich verhält, wie die Oberfläche des Parallelepipedum zu der des Würfels. Man findet z. E. $h(3ab - c(a+b)) = abc$; und $h = \frac{abc}{3ab-c(a+b)}$. Wenn also ein Würfel gegeben ist; so kann man eine unbegränzte Anzahl von rechtwinklichten Parallelepipeden finden, deren Körper sich wie ihre Oberflächen verhalten.

Anmerkung. Man könnte diese Untersuchungen auf mehrere andere, sowohl Flächen, als Körper ausdehnen, und zeigen: daß man ausser den ebenen um einen Kreis beschriebenen Figuren, und den um eine Kugel beschriebenen Körpern, soviel ebene, und körperliche Figuren, als man will, finden könne, deren Inhalt sich wie ihr Umfang verhalte. Herr le Sage hat von diesen Säzen, so elementarisch sie auch sind, interessante Anwendungen zu machen gewußt; indem er mittelst derselben die Schwäche der Einwendungen gegen jede mechanische Erklärung der Schwere zeigte, welche man auf die daraus folgend sollende Nichtproportionalität der Gewichte und Maassen gründet.

Viertes Capitel.

Von der Erhebung ins Quadrat; Ausziehung der Quadratwurzel; und von den incommensurablen Größen.

§. 58.

Erklärung. Das Product der Multiplication einer Zahl durch sich selbst heißt das Quadrat dieser Zahl.

So sind die Quadrate der Zahlen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10....

beziehungsweise

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100....

Lehnsaz. Das Quadrat einer aus zwey Theilen zusammengesezten Zahl, besteht aus der Summe der Quadrate beyder Theile, und aus ihrem doppelten Product.

Symbolisch. $a+b$ sey die Summe der zwey Zahlen a und b; so besteht das Quadrat dieser Summe aus der Summe ihrer Quadrate aa und bb, und aus ihrem doppelten Product 2ab.

Denn multiplicirt man die Summe $a+b$ durch sich selbst; so erhält man:

$a+b$ Multiplicandus
$a+b$ Multiplicator

$aa+ab$ Product durch a
$ab+bb$ Product durch b

$aa+2ab+bb$ Totalproduct oder Quadrat von $a+b$.

Anmer-

Anmerkung. Nach der §. 48. erklärten Bezeichnungsart wird dieses ausgedrükt durch $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Auf den vorgetragenen Saz gründet sich sowohl die Zusammensezung der Quadrate; als die Ausziehung der Quadratwurzel, das heißt die Art eine Zahl zu finden, welche mit sich selbst multiplicirt eine gegebene Zahl hervorbringt.

Erster Fall. Um das Quadrat einer aus zwey Ziffern, das heißt, aus Zehnern und Einheiten bestehenden Zahl zu machen, zerlege man die Zahl in ihre Zehner und Einheiten; und seze ihr Quadrat nach der angegebenen Regel zusammen aus dem Quadrat ihrer Zehner, welches Hunderte macht, aus dem doppelten Product der Zehner in die Einheiten, welches Zehner giebt, und aus dem Quadrat ihrer Einheiten.

Erstes Beyspiel. Die vorgegebene Zahl sey 34=30+4
Das Quadrat von 34 besteht

1.) aus dem Quadrat von 30	900
2.) aus dem doppelten Product von 30 in 4	240
3.) aus dem Quadrat von 4	16
Summe, oder Quadrat von 34	1156.

Zweytes Beyspiel. Vorgegebene Zahl 64=60+4

1.) Quadrat von 60	3600
2.) doppeltes Product von 60 in 4 . . .	480
3.) Quadrat von 4	16
Summe, oder Quadrat von 64	4096.

Drittes Beyspiel. Vorgegebene Zahl 85=80+5

1.) Quadrat von 80	6400
2.) doppeltes Product von 80 in 5	800
3.) Quadrat von 5	25
Summe, oder Quadrat von 85	7225.

Besteht eine Zahl nur aus zwey Ziffern; so hat ihr Quadrat nicht mehr als vier, und nicht weniger als drey Ziffern. Nämlich das Quadrat von 10 ist 100; welches das kleinste Quadrat einer aus zwey Ziffern bestehenden Zahl ist. Und das Quadrat von 100 ist 10000; welches größer ist als die Quadrate der aus zwey Ziffern bestehenden Zahlen.

Man lasse in den vorhergehenden Beyspielen die Nullen weg, welche aus denjenigen entstehen, die auf die bedeutende Ziffern der Zehner der Wurzeln folgen; so erhält man

für das Quadrat von	34	9
		24
		16
		1156
. . . . .	64	36
		48
		16
		4096
. . . . .	85	64
		80
		25
		7225

Das Quadrat der Einheiten endiget sich in dem Quadrat der Zahl bey der lezten Ziffer rechter Hand.

Das doppelte Product der Zehner in die Einheiten endiget sich bey der vorlezten Ziffer; denn dieses doppelte Product sind Zehner.

Das Quadrat der Zehner endiget sich bey der dritten Ziffer von der rechten Hand angerechnet; denn dieses Quadrat sind Hunderte.

§. 59.

Dies vorausgesezt, sey eine Zahl, wie 1156, vorgegeben, welche aus mehr als zwey, aber aus nicht mehr als vier Ziffern besteht. So besteht die Quadratwurzel dieser Zahl aus zwey Ziffern; und das Quadrat der bedeutenden Ziffer der Zehner ist in der aus der 3ten und 4ten Ziffer von der rechten Hand an gerechnet bestehenden Zahl 11 enthalten. Das Quadrat, welches unmittelbar kleiner ist als 11, ist 9; wovon 3 die Wurzel ist. Die Quadrat-Wurzel der vorgegebenen Zahl enthält also 3 Zehner. Man ziehe von 1156 das Quadrat dieser Zehner, das heißt das Quadrat von 30, welches 900 ist, ab; so bleibt 256 übrig. Dieser Rest muß das doppelte Product der gefundenen Zehner in die Einheiten, und das Quadrat der Einheiten seyn. Er muß also insbesondere das doppelte Product der Zehner in die Einheiten enthalten. Man dividire 256 durch das doppelte von 30, das ist durch 60: der nächste Quotient in ganzen Zahlen ist 4; die Wurzel hat mithin 4 Einheiten. Man ziehe das doppelte Product von 30 durch 4, oder das Product von 60 durch 4, welches 240 ist, ab; so bleibt 16 übrig, welches das Quadrat der Einheiten 4 ist.

Darstellung dieses Verfahrens:

	1156	{30+4
	900	Quadrat der Zehner abzuziehen
60)	256	Rest zum dividiren
	240	doppeltes Product von 30 in 4
	16	Rest
	16	Quadrat der Einheiten
	0	

Zweytes Beyspiel. Vorgegebene Zahl .... 4096. Die Quadratzahl, welche zunächst kleiner ist als 40, ist 36; wovon 6 die Wurzel ist. Die Quadratwurzel von 4096 hat

also 6 Zehner. Das übrige Verfahren ist wie im vorigen Beyspiel.

Darstellung der Operation:

```
      4096 {60+4
      3600 Quadrat der Zehner abzuziehen
120)   496 Rest zum dividiren
       480 doppeltes Product der Zehner in die Ein-
           heiten
        16 Rest
        16 Quadrat der Einheiten
         0
```

Drittes Beyspiel. Vorgegebene Zahl . . . . 1444. Die Quadratzahl, welche zunächst kleiner ist als 14, ist 9; wovon 3 die Wurzel ist. Die Quadratwurzel von 144 enthält also 3 Zehner. Zieht man 900 von 1444 ab, so bleibt 544. Dividirt man diesen Rest durch das Doppelte der Zehner, das ist durch 60; so erhält man den Quotienten 9. Zieht man von 544 das Product von 60 in 9 ab: so bleibt 4; wovon man das Quadrat der Einheiten, welches 81 ist, nicht abziehen kann. Man hat also den Quotienten zu gros angenommen; und muß es nun, indem man ihn um eine Einheit vermindert, mit 8 als der Zahl der Einheiten versuchen. Dieser Versuch gelingt; und man bekommt 38 für die Wurzel von 1444.

Darstellung des ersten Versuchs:

```
     1444 {30+9
      900
60)   544
      540
        4
       81 Quadrat der Einheiten,
welches man nicht abziehen kann.
```

Darstellung des zweyten Versuchs:

```
     1444 {30+8
      900
60)   544
      480
       64
       64
        0
```

Bey der gewöhnlichen Division sezt man in den Quotienten die Nullen nicht, welche die Stellen der Ziffern bestimmen, aus denen der Quotient besteht; auch läßt man die aus eben dieser Quelle herrührenden Nullen der Partial-Producte des Divisors in die Ziffern des Quotienten weg. Ebenso läßt man bey der Ausziehung der Quadratwurzel die Nullen weg, welche die Stellen der Ziffern der Wurzel bestimmen. Hiernach fallen die Darstellungen der vorhergehenden Beyspiele so aus:

1156 { 34	4096 { 64	1444 { 38
9	36	9
6) 25	12) 49	6) 54
24	48	48
16	16	64
16	16	64
0	0	0

Man kürzt das Verfahren auch noch dadurch ab, daß man die Subtraction des doppelten Products der Zehner in die Einheiten und des Quadrats der Einheiten zugleich verrichtet. Die Summe dieses doppelten Products und dieses Quadrats ist das Product der Einheiten in die Zahl, welche aus dem doppelten der Zehner und aus den Einheiten besteht. Man hängt daher die gefundene Einheiten der Wurzel dem Divisor rechter Hand an; und multiplicirt die auf solche Weise zusammengesezte Zahl durch die Einheiten. Und anstatt nur die Ziffer der Zehner der vorgegebenen Zahl neben den ersten Rest herunter zu sezen; sezt man zugleich die Ziffer der Einheiten herunter: nimmt aber fürs erste auf diese Ziffer in der Aufsuchung des Quotienten keine Rüksicht.

Darstellung dieser Abkürzungen an den vorhergehenden Beyspielen:

$$
\begin{array}{r|l} 1156 & 34 \\ 9 & \\ \hline 64)\ 25.6 & \\ 256 & \\ \hline 0 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} 4096 & 64 \\ 36 & \\ \hline 124)\ 49.6 & \\ 496 & \\ \hline 0 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} 1444 & 38 \\ 9 & \\ \hline 68)\ 54.4 & \\ 544 & \\ \hline 0 & \end{array}
$$

Man kann auch, wie bey der gewöhnlichen Division, die Subtraction verrichten, ohne das Product zu schreiben

Hat man das bisherige Verfahren bey Zahlen, deren Quadratwurzel nur aus zwey Ziffern besteht, gut begriffen; so ist es leicht dasselbe auf Zahlen von irgend einer Anzahl von Ziffern auszudehnen.

Man verlangt z. B. das Quadrat der aus drey Ziffern bestehenden Zahl 436. Man zerfälle diese Zahl in ihre Hunderte, Zehner und Einheiten; nämlich $436=400+30+6$. Man nehme das Quadrat von 430 oder von $400+30$; welches geschieht, wenn man das Quadrat von 400, das doppelte Product von 400 in 30, und das Quadrat von 30 zusammen nimmt. Zu diesen Theilen addire man alsdenn das doppelte Product von 430 in 6 und das Quadrat von 6. Dieß giebt folgende Darstellung:

$$
\begin{array}{rcr}
400^2 & = & 160\,000 \\
2.400.30 & = & 24\,000 \\
30^2 & = & 900 \\
2.430.\ 6 & = & 5\,160 \\
6^2 & = & 36 \\
\hline
436^2 & = & 190\,096.
\end{array}
$$

Man lasse in den Gliedern des Quadrats die Nullen weg, welche von den, auf die bedeutende Ziffern in der Wurzel folgenden, Nullen herrühren; so bekommt man:

$$\begin{array}{r} 16 \\ 24 \\ 9 \\ 516 \\ 36 \\ \hline 190096. \end{array}$$

Dieser Zerlegung zufolge kommt jede lezte Ziffer der successiven Producte um eine Stelle weiter nach der Rechten zu. Und da man abwechselnd Quadrate und doppelte Producte erhält; so endigen sich die lezte Ziffern der successiven Quadrate der Ziffern der Wurzel um zwey Stellen weiter gegen die rechte Hand: wie dieß der Betrachtung zufolge seyn muß, daß die Quadrate der Zehner, Hunderte; und die Quadrate der Hunderte, Zehntausende sind.

Ebenso verfährt man bey Zusammensezung des Quadrats einer aus noch mehr Ziffern bestehenden Zahl: wie ich noch an einigen Beyspielen zeigen will.

Ins Quadrat zu erhebende Zahlen:

$$\begin{array}{rcr} \underline{2384} & & \\ 2^2 & = & 4 \\ 2.2.3 & = & 12 \\ 3^2 & = & 9 \\ 2.23.8 & = & 368 \\ 8^2 & = & 64 \\ 2.238.4 & = & 1904 \\ 4^2 & = & 16 \\ \hline 2384^2 & = & 5683456 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} \underline{34576} & & \\ 3^2 & = & 9 \\ 2.3.4 & = & 24 \\ 4^2 & = & 16 \\ 2.34.5 & = & 340 \\ 5^2 & = & 25 \\ 2.345.7 & = & 4830 \\ 7^2 & = & 49 \\ 2.3457.6 & = & 41484 \\ 6^2 & = & 36 \\ \hline 34576^2 & = & 1195499776 \end{array}$$

§. 60.

Hiernach ist es leicht, eine allgemeine Regel für die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer vorgegebenen Zahl von beliebig vielen Ziffern anzugeben.

Man theile die vorgegebene Zahl von der rechten Hand an in Abschnitte von je zwey Ziffern; wobey der lezte Abschnitt linker Hand auch nur eine Ziffer enthalten kann. Die Anzahl der Ziffern der Wurzel ist der Anzahl dieser Abschnitte gleich.

Man suche die grösste in dem lezten Abschnitte linker Hand enthaltene Quadratzahl. Die Wurzel dieses Quadrats wird die erste Ziffer der gesuchten Wurzel seyn. Von diesem lezten Abschnitte linker Hand ziehe man dieses Quadrat ab. Neben den Rest seze man den rechter Hand zunächst folgenden Abschnitt herunter; verdopple den bereits gefundenen Theil der Wurzel; dividire durch dieses Doppelte die aus dem ersten Rest und dem herabgesezten Abschnitt bestehende Zahl, so daß man bey dieser Division auf die lezte Ziffer des Dividendus keine Rüksicht nimmt; hänge den Quotienten dem Divisor rechter Hand an; multiplicire durch diesen Quotienten den so vergrößerten Divisor; und ziehe das Product von der aus dem ersten Rest und dem ganzen herabgesezten Abschnitt bestehenden Zahl ab. Ist das Product zu gros, als daß es abgezogen werden könnte; so vermindere man den Quotienten um eine Einheit, bis die Subtraction möglich ist. Der gröste Quotient, mit welchem diese Subtraction geschehen kann, ist die zweyte Ziffer der gesuchten Quadratwurzel. Ebenso verfahre man mit dem Rest dieser Subtraction, mit dem folgenden Abschnitt, und mit dem bereits gefundenen Theil der Wurzel. So erhält man die Ziffern der Wurzel, eine nach der andern, durch successive Divisionen mit immer veränderten Divisoren, so lang fortgesezt, bis die vorgegebene Zahl ganz erschöpft ist. Ich will diese Regel durch Entwiklung eines Beyspiels erläutern:

```
     21,43,69 {463
     16
86)  54.3
     516
923) 276.9
     2769
        0
```

Ich theile die vorgegebene Zahl 214369 von der rechten Hand gegen die linke in Abschnitte von je zwey Ziffern. Die Zahl der Abschnitte ist hier drey; folglich hat die Quadratwurzel der vorgegebenen Zahl drey Ziffern. Die Quadratzahl, welche zunächst kleiner ist als die den ersten Abschnitt linker Hand ausmachende Zahl 21, ist 16; wovon die Wurzel 4 ist. Zieht man 16 von 21 ab; so bleibt 5 übrig. Neben diesen Rest 5 seze ich den nächsten Abschnitt 43 herunter, ohne fürs erste auf die lezte Ziffer 3 Rüksicht zu nehmen. Ich verdopple den gefundenen Theil 4 der Wurzel, und dividire 54 durch 8; wodurch ich 6 zum Quotienten erhalte, welches ich zugleich in die Wurzel und an den Divisor seze. Das Prouct von 86 in 6 ist 516; welches von 543 abgezogen den Rest 27 gibt. Neben diesen Rest 27 seze ich den folgenden Abschnitt 69 herunter; ohne anfänglich auf die lezte Ziffer 9 Rüksicht zu nehmen, dividire 276 durch 92, das Doppelte des gefundenen Theils 46 der Wurzel. Den Quotienten 3 seze ich sowohl in die Wurzel, als rechter Hand an den lezten Divisor; und multiplicire durch diesen Quotienten 3 den so vergrößerten Divisor 923. Da das Product 2769 dem vorhandenen Rest der vorgegebenen Zahl gleich ist; so ist die Quadratwurzel dieser Zahl 463.

Anderes Beyspiel.

```
    6,09,59,61 {25
    4
45) 20.9
    225   der Quotient wurde zu
          gros genommen.
```

```
      6,09,59,61 {2469
      4
44)   20.9
      176
486)  335.9
      2916
4929) 4436.1
      44361
          0
```

Die Quadratwurzel aus einem Bruch auszuziehen, muß man die Quadratwurzel aus seinem Zähler und Nenner nehmen.

Beyspiele:

$$\sqrt{\tfrac{4}{9}}=\tfrac{2}{3};\quad \sqrt{\tfrac{9}{16}}=\tfrac{3}{4};\quad \sqrt{\tfrac{16}{25}}=\tfrac{4}{5};\quad \sqrt{\tfrac{144}{625}}=\tfrac{12}{25}.$$

§. 61.

Ich habe in den bisherigen Beyspielen vorausgesezt: man könne die Quadratwurzeln vorgegebener ganzer Zahlen in ganzen Zahlen angeben. Geht dieses nicht an; so giebt man gewöhnlich diese Wurzeln durch Näherung in Decimalbrüchen an. Man sezt nämlich zu der vorgegebenen Zahl nach und nach je zwey Nullen, die man als Decimalziffern betrachtet; wodurch jedesmal die Wurzel um eine Decimalziffer vermehrt wird.

Man habe z. B. die Zahl 2, woraus sich die Quadratwurzel nicht in ganzen Zahlen ausziehen läßt; und man wolle die Wurzel daraus bis auf Tausendtheile genau finden. Zu diesem Ende seze man an die Zahl 2 drey DecimalAbschnitte, jeden von zwey Nullen: und verfahre mit der Zahl 2000000 wie bisher. So erhält man aus 2,000000 die Wurzel 1,414..... Die Quadratwurzel von 2 nähert sich mithin der Zahl 1,414 so, daß man dabey um kein Tausendtheilchen der Einheit fehlt. Will man die Genauigkeit bis auf 10000tel treiben; so findet man $\sqrt{2}$
$= 1,4142.....$
$= 1,41421.....$, welches bis auf 100000tel genau ist. Ebenso ergeben sich

$$\sqrt{3}=1,732.....$$
$$\sqrt{5}=2,236.....$$
$$\sqrt{\tfrac{2}{3}}=\sqrt{\tfrac{6}{9}}=\tfrac{1}{3}\sqrt{6}=\tfrac{1}{3}\times 2,4494....=0,81646....$$
$$\sqrt{\tfrac{3}{5}}=\sqrt{\tfrac{15}{25}}=\tfrac{1}{5}\sqrt{15}=\tfrac{1}{5}\times 3,8729....=0,77458....$$

§. 62.

Hier ergiebt sich nun eine wichtige Frage zu erörtern. Das §. 61. zu Ausziehung der Quadratwurzeln aus den Zahlen 2, 3, 5..... welche keine Quadratwurzeln in ganzen Zahlen haben, angewandte Verfahren hat nur Annäherungen gegeben, insofern wir die Genauigkeit nur auf eine kleine Anzahl von Decimalziffern getrieben haben. Ist es nun möglich oder nicht, in diesem Fall die Wurzel genau zu finden, wenn man die Operation bis auf eine größere Anzahl von Decimalziffern fortsezt? Ueberhaupt läßt sich die Quadratwurzel einer ganzen Zahl genau durch einen Bruch angeben, wenn sie keine ganze Zahl zur Quadratwurzel hat?

Ehe ich diese Frage allgemein beantworte, halte ich für schiklich, einige besondere Beyspiele zu entwiklen, welche die verneinende Antwort wahrscheinlich machen.

Man nehme die Zahl 2, welche keine ganze Zahl zur Quadratwurzel hat. Wenn sie eine gemischte (aus einer ganzen Zahl und einem Bruch bestehende) Zahl zur Quadratwurzel hätte: so müste, nachdem man diese gemischte Zahl in einen unächten Bruch verwandelt, das Quadrat seines Zählers das Doppelte von dem Quadrat seines Nenners seyn. Die vorgelegte Frage reducirt sich demnach auf diese andere: gibt es zwey ganze Quadratzahlen, deren eine das Doppelte der andern ist? Oder ist das Doppelte irgend einer Quadratzahl wieder eine Quadratzahl?

Wenn die lezte Ziffer einer ganzen Zahl nicht Null ist; so ist sie eine von folgenden . . . 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
die lezte Ziffer ihres Quadrats ist
also . . . . 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1.
Oder nur . . . . 1, 4, 9, 6, 5.
Und die lezte Ziffer des Doppelten dieses Quadrats ist eine der
folgenden 2, 8, 8, 2, 0
oder nur . . . . 2, 8, 0.
Die Endigungen 2 und 8 der doppelten Quadratzahlen fin-

den sich nicht unter den Endigungen der Quadratzahlen: und in so ferne ist also das Doppelte einer Quadratzahl kein Quadrat; nämlich das Doppelte des Quadrats einer Zahl, die sich auf $\left\{\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4,\\ 9, & 8, & 7, & 6,\end{matrix}\right\}$ endiget, ist kein Quadrat.

Ich gehe nun zur Untersuchung der Endigung 5 über.

Endiget sich eine Zahl mit 5: so ist sie von der Form $10n+5$: folglich ist ihr Quadrat von der Form $100nn+100n+25$; es besteht also aus Hunderten und aus 25, oder es endiget sich mit 25. Das Doppelte davon endiget sich mit 50; das ist, mit einer einzigen Nulle. Endiget sich aber eine Zahl mit einer oder mehreren Nullen; so endiget sich ihr Quadrat mit einer geraden Anzahl von Nullen. Folglich endiget sich das Doppelte des Quadrats einer auf 5 sich endigenden Zahl nicht wie eine Quadratzahl sich endigen muß. Demnach ist dieses Doppelte keine Quadratzahl.

Endlich nehme man eine Zahl, die sich mit einer oder mehreren Nullen endiget. Bey der Endigung auf eine Nulle z. B. ist die Zahl von der Form $10n$; ihr Quadrat ist $100nn$; und das Doppelte dieses Quadrats ist $100\times2nn$. Da man annimmt, daß n sich nicht mit Null endige; so ist $2nn$ kein Quadrat. Folglich ist auch $100\times2nn$ oder $200nn$ kein Quadrat. Der nämliche Beweis läßt sich auf das Doppelte der Quadrate von Zahlen, die sich auf irgend eine Anzahl von Nullen endigen; so wie auch auf die Doppelte der Quadrate von Zahlen, deren lezte Ziffer zwey ist, anwenden.

Gleichfalls endigen sich die Dreyfachen der Quadrate der Zahlen, deren lezte Ziffer bedeutend ist, mit den Ziffern 3, 2, 7, 8, 5; welche Endigungen keinen Quadratzahlen zugehören können.

Man könnte diesen besondern Beweis auf mehrere andere Zahlen anwenden. Ich habe ihn aber nur als Einleitung zur Entwiklung des allgemeinen Sazes vorgetragen.

§. 63.

Erklärung. Eine ganze Zahl, die sich durch keine andere, als durch sich selbst und durch die Einheit, ohne Rest dividiren läßt, oder die, wie man sagt, keinen andern (ganzen) Divisor, Factor hat als die Einheit und sich selbst, heißt eine **Primzahl**. Dergleichen sind die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41...

Die übrige Zahlen heißen **zusammengesezte**; sie sind nämlich Producte gleicher oder ungleicher Primzahlen. So ist $4=2\times2$; $6=2\times3$; $8=2\times2\times2$; $12=2\times2\times3$; $30=2\times3\times5$.

Im Gegensaz der zusammengesezten heißen die Primzahlen auch **einfache**; besonders bey Producten, **einfache Factoren** oder Divisoren derselben.

Zwey Zahlen heissen **Primzahlen unter sich**, wenn sie keinen andern gemeinschaftlichen Divisor (Factor) als die Einheit haben. So sind alle Primzahlen auch Primzahlen unter sich; und eine Primzahl und jede andere Zahl, die kein vielfaches von ihr ist, sind Primzahlen unter sich. Desgleichen sind die Zahlen 8 und 9, 14 und 15, Primzahlen unter sich, ob sie gleich selbst keine Primzahlen sind.

§. 64.

Lehrsaz. Das Product zweyer Zahlen hat keine andere Primzahlen zu Divisoren, als die, welche einen seiner Factoren dividiren.

Erstes Beyspiel. Es sey n eine vorgegebene Zahl, und 2n das Product dieser Zahl durch 2. Es sey p eine Primzahl, welche 2n ohne Rest dividirt. — So muß p entweder 2, oder ein Divisor von n seyn.

Beweis. Wenn p die Zahl n dividirt; so ist der Saz bewiesen.

Wenn aber p die Zahl n nicht (ohne Rest) dividirt: so erhält man, indem man n durch p dividirt, einen ganzen Quotienten q; so daß n gleich ist der Summe des Products pq und eines Rests r, welcher kleiner ist als p: das heißt, es ist $n = pq + r$

und $2n = 2pq + 2r$. Weil 2n als durch p divisibel angenommen worden ist, und der Theil 2pq durch p sich dividiren läßt: so ist auch der andere Theil 2r durch p divisibel; oder $\frac{2r}{p}$ ist eine ganze Zahl. Da $r < p$; $\frac{r}{p} < 1$; und $\frac{2r}{p} < 2$ ist: so folgt $\frac{2r}{p} = 1$ und $p = 2r$. Nun ist aber p eine Primzahl; folglich $r = 1$, und $p = 2$. Wenn also die 2n dividirende Primzahl p, den Factor n nicht dividirt; so ist sie gleich 2.

Zweytes Beyspiel. p sey eine Primzahl, welche 3n dividirt. So muß p entweder 3, oder ein Divisor von n seyn.

Beweis. Wenn p die Zahl n dividirt, so ist der Saz bewiesen.

p dividire aber die Zahl n nicht; sondern n sey $= pq + r$, wo $r < p$.

So ist $3n = 3pq + 3r$: folglich 3r divisibel durch p; oder $\frac{3r}{p}$ eine ganze Zahl. Es ist aber $r < p$, oder $\frac{r}{p} < 1$; folglich $\frac{3r}{p} < 3 = 1, 2$; und $3r = p, 2p$.

1.) Es sey $p = 3r$. p ist aber eine Primzahl; folglich $r = 1$, und $p = 3$.

2.) Es sey $2p = 3r$, oder $r = \frac{2p}{3}$; so ist $\frac{2p}{3}$ eine ganze Zahl. Aber 2 wird durch 3 nicht dividirt. Folglich ist (1. Beysp.) p durch 3 theilbar. Nun ist aber p eine Primzahl; also $p = 3$.

Drittes Beyspiel, welches eine Anwendung der zwey vorhergehenden ist.

Es sey p eine Primzahl, welche $6n=2\times 3n=3\times 2n$ dividirt. So muß p entweder 2, oder 3, oder ein Divisor von n seyn.

Denn dividirt die Primzahl p, welche ein Divisor des Products $2\times 3n$ ist, dessen Factor 3n; so ist sie 3, oder ein Divisor von n (2. Beyspiel). Dividirt sie aber 3n nicht; so ist sie 2 (1. Beyspiel).

Eben so wenn die Primzahl p die Zahl $4n=2\times 2n$ dividirt; so ist sie, wenn sie den Factor 2n dividirt, entweder 2 oder ein Divisor von n (1. Beyspiel): folglich ist eine Primzahl, welche 4n dividirt, gleich 2, oder ein Divisor von n.

Viertes Beyspiel. Die Primzahl p sey Divisor von 5n; so ist sie entweder 5, oder ein Divisor von n.

Wenn p die Zahl n dividirt, so ist der Saz bewiesen.

Wenn p die Zahl n nicht dividirt: so sey

$$n = pq + r, \ (r < p)$$

also $5n = 5pq + 5r$.

Weil p sowohl die Zahl 5n, als ihren Theil 5pq dividirt; so dividirt sie auch den andern Theil 5r. Es ist aber $r < p$; so muß $\frac{5r}{p}$ < als 5 seyn, = 1, 2, 3, 4.

1.) Es sey $5r=p$; so ist, weil p eine Primzahl ist, $r=1$, und $p=5$.

2.) Es sey $5r=2p$; $r=\frac{2p}{5}$. Folglich ist $\frac{2p}{5}$ eine ganze Zahl. Nun ist aber 5 weder gleich 2, noch dividirt sie 2; folglich (1. Beysp.) dividirt 5 die p. Es ist aber p eine Primzahl; demnach $p=5$.

3.) Ebenso wird, wenn $5r = 3p$, aus dem 2ten Beyspiel gefolgert $p = 5$.

4.) Es sey $5r = 4p$: so ist $\frac{4p}{5}$ eine ganze Zahl; folglich (3. Beysp.) $p = 5$.

Diese Beyspiele sind hinreichend, zur Einleitung des allgemeinen Beweises von folgendem Saz zu dienen: Die Primzahl p sey ein Divisor des Products mn; so dividirt p den Factor m, oder den andern n.

Dividirt p den Factor n, so ist der Saz bewiesen.

Dividirt sie n nicht;
so sey $n = pq + r$, $(r < p)$
also $mn = mpq + mr$.

Nach der Voraussezung ist mn durch p divisibel. Der Theil mpq von mn ist aber für sich durch p theilbar; folglich ist auch der Theil mr durch p divisibel. Nun ist aber $r < p$; $\frac{r}{p} < 1$: folglich

$$\frac{mr}{p} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots m-1$$

$$mr = p, 2p, 3p, 4p, 5p, 6p, \ldots\ldots (m-1)p$$

und $$r = \frac{p}{m}, \frac{2p}{m}, \frac{3p}{m}, \frac{4p}{m}, \frac{5p}{m}, \frac{6p}{m} \ldots\ldots \frac{(m-1)p}{m}.$$

Erster Fall. m sey eine Primzahl. Die Coefficienten von p, welche kleiner als m sind, lassen sich nicht durch m dividiren. Vorausgesezt also, daß für alle Coefficienten m', welche kleiner als m sind, bewiesen sey: die Primzahl m, welche m'p dividirt, sey ein Divisor von p: so muß, weil p eine Primzahl ist, $p = m$ seyn. Jene Voraussezung ist aber für einige kleine Werthe von m, nämlich für 2, 3, 5, bewiesen worden. Die Richtigkeit des Sazes ergiebt sich also auch daraus nach und nach für immer größere Werthe von m, wie 7, 11, 13, 17......

Zweyter

Zweyter Fall. m sey eine aus zwey einfachen Factoren m' und m'' bestehende Zahl, so daß $mn = m'm''n = m' \times m''n = m'' \times m'n$. So dividirt die Primzahl p, wodurch sich mn dividiren läßt, einen der beyden Factoren m' und $m''n$. Dividirt sie $m''n$; so ist sie gleich m'', oder sie dividirt n (1. Fall): und dividirt sie $m''n$ nicht, so ist sie gleich m'. Folglich ist die Primzahl p, wodurch sich mn dividiren läßt, entweder einem der einfachen Divisoren m', m'' von m gleich, oder sie ist ein Divisor von n.

Dritter Fall. m sey eine aus drey einfachen Factoren m', m'', m''', zusammengesezte Zahl; so daß $mn = m'm''m'''n = m' \times m''m'''n$. So muß die Primzahl p, wodurch sich mn dividiren läßt, entweder ein Divisor von $m''m'''n$, oder gleich m' seyn (1. Fall): und dividirt sie $m''m'''n$; so ist sie gleich m'' oder m''', oder sie ist ein Divisor von n (2. Fall). Demnach ist die Primzahl p entweder einem der einfachen Divisoren m', m'', m''', von m gleich; oder sie dividirt n.

Von dem Fall, wo m ein Product von drey einfachen Factoren ist, geht man zu dem Fall, wo m aus vier einfachen Factoren besteht, eben so fort, wie man von dem Product aus zwey Factoren auf das von drey geschlossen hat. Von vier einfachen Factoren schließt man ebenso wieder auf fünf, und so immer weiter fort, indem man die Anzahl der Factoren von m um einen vermehrt.

Erster Zusaz. Das Product der Multiplication irgend einer Anzahl von Primzahlen hat keine andere einfache Divisoren als eben diese Primzahlen.

Zweyter Zusaz. Zwey Producte bestehen, das eine aus gewisen einfachen Factoren, und das andere ebenfalls aus gewisen einfachen Factoren, wovon aber keiner einerley ist mit irgend einem Factor des ersten: so sind diese zwey Producte Primzahlen unter sich; und insbesondere ist keines von beyden ein Vielfaches des andern.

Dritter Zusaz. Wenn zwey Zahlen Primzahlen unter sich sind; so sind ihre Quadrate ebenfalls Primzahlen unter sich.

Hauptfolgerung. Wenn eine ganze Zahl keine Quadratwurzel in ganzen Zahlen hat; so hat sie auch keine in gebrochenen Zahlen.

N sey eine ganze Zahl, wovon keine ganze Zahl die Quadratwurzel ist. Die Quadratwurzel derselben sey, wenn es möglich ist, genau durch eine ganze Zahl und einem Bruch, oder durch einen sogenannten unächten Bruch ausgedrükt. Man bringe diesen Bruch auf seine einfachste Benennung. Das Quadrat dieses Bruchs, dessen Zähler und Nenner die Quadrate des Zählers und Nenners des ersten Bruchs sind, wird ein Bruch seyn, dessen Glieder Primzahlen unter sich sind: der Zähler desselben wird sich also durch seinen Nenner nicht dividiren lassen: der Bruch wird mithin der vorgegebenen ganzen Zahl N nicht gleich seyn; welches seyn müßte, wenn der erste Bruch die genaue Quadratwurzel der Zahl N seyn sollte.

Erklärung. Die Größen, wodurch man die Quadratwurzeln ganzer Zahlen, welche keine Quadratwurzel in ganzen Zahlen haben, auszudrüken sucht, heissen incommensurable oder irrationelle: in so fern sie nämlich kein gemeinschaftliches Maaß mit der Einheit haben; oder in so fern ihr Verhältniß zur Einheit nicht in Zahlen angegeben werden kann. Man drükt sie durch die Größe selbst aus, wovon sie die Wurzel sind, mit Voransezung des Zeichens $\surd$. So bezeichnet man die Quadratwurzeln der Zahlen 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12...... durch $\surd 2$, $\surd 3$, $\surd 5$, $\surd 6$, $\surd 7$, $\surd 8$, $\surd 10$, $\surd 11$, $\surd 12$......

Anmerkung. Aus diesen Größen entsteht ein sehr merkwürdiger Unterschied zwischen der Geometrie und Arithmetik. In der Geometrie kann man, wenn ein Rectangel gegeben ist, durch Construction die Seite des ihm gleichen Quadrats finden; oder man kann zwischen jeden zwey gege-

benen geraden Linien die mittlere Proportionallinie finden; oder man kann die Seite eines Quadrats finden, dessen Exponent des Verhältnisses zu einem gegebenen Quadrat irgend eine gegebene ganze oder gebrochene Zahl ist. So verhält es sich aber nicht mit den diesen Constructionen entsprechenden Operationen der Arithmetik.

§. 65.

Ausser der §. 61. gezeigten Art die Quadratwurzeln durch Näherung in Decimalbrüchen anzugeben; können auch die gewöhnlichen Brüche mit Vortheil dazu gebraucht werden, so daß man wechselsweise Brüche erhält, die größer und kleiner sind als die verlangte Wurzeln. Die Ausführung dieses Gegenstandes gehört in diejenige folgende Capitel, wo ich von den sogenannten stetigen Brüchen und von den wiederkehrenden Reihen handlen werde. Vor izt begnüge ich mich einige Beyspiele dieser neuen Art von Annäherung zu geben.

Es sey die Zahl 2, deren Quadratwurzel man durch Näherung sucht.

Sezt man $\sqrt{2} = 1 + z$

so werden $2 = 1 + 2z + zz$

$1 = 2z + zz = z(2+z)$

$$z = \frac{1}{2+z} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+z}} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}}}}$$

Leitet man aus diesem stetigen Bruch die gewöhnlichen Brüche her, wie sie einer nach dem andern daraus entstehen; so findet man folgende angenäherte Werthe für z:

1.) $z=\frac{1}{2}$.

2.) $z=\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}$.

3.) $z=\frac{1}{2+\frac{2}{5}}=\frac{1}{\frac{12}{5}}=\frac{5}{12}$.

4.) $z=\frac{1}{2+\frac{5}{12}}=\frac{1}{\frac{29}{12}}=\frac{12}{29}$.

5.) $z=\frac{1}{2+\frac{12}{29}}=\frac{1}{\frac{70}{29}}=\frac{29}{70}$.

6.) $z=\frac{1}{2+\frac{29}{70}}=\frac{1}{\frac{169}{70}}=\frac{70}{169}$.

7.) $z=\frac{1}{2+\frac{70}{169}}=\frac{1}{\frac{408}{169}}=\frac{169}{408}$.

. . . .

Macht man nämlich die Reihe 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408 ..... deren jedes Glied die Summe des Doppelten zunächst vorhergehenden, und des Einfachen vorlezten Gliedes ist; so sind die angenäherten Werthe von z Brüche, deren Zähler und Nenner zwey auf einander folgende Glieder dieser Reihe sind, wovon der Nenner das größere ist. Und die successive, sich immer mehr nähernde Werthe von $\sqrt{2}$ sind:

$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \ldots\ldots$

Man nehme die Quadrate dieser successiven Brüche, und vergleiche dieselbe mit der Zahl 2; so erhält man:

$(\frac{1}{1})^2 = 1 = 2-1$

$(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} = 2+\frac{1}{4}$

$(\frac{7}{5})^2 = \frac{49}{25} = 2-\frac{1}{25}$

$(\frac{17}{12})^2 = \frac{289}{144} = 2+\frac{1}{144}$

$(\frac{41}{29})^2 = \frac{1681}{841} = 2-\frac{1}{841}$

$(\frac{99}{70})^2 = \frac{9801}{4900} = 2+\frac{1}{4900}$

$(\frac{239}{169})^2 = \frac{57121}{28561} = 2-\frac{1}{28561}$

$(\frac{577}{408})^2 = \frac{332929}{166464} = 2+\frac{1}{166464}$

. . . .

Diese Beyspiele zeigen: daß jene Brüche sich der Quadratwurzel von 2 immer mehr so nähern, daß sie wechselsweise größer und kleiner sind als diese Wurzel; und daß die Quadrate ihrer Zähler wechselsweise um eine Einheit größer und kleiner sind, als die doppelte Quadrate ihrer Nenner.

Ich will nun beweisen, daß dieses Gesez immer Statt hat. $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{2b+a}$ seyen zwey auf einander folgende Werthe von z;
folglich $\frac{b+a}{b}$, $\frac{3b+a}{2b+a}$, zwey successive Werthe von $\sqrt{2}$.

Es seye erwiesen, daß $(b+a)^2 = 2bb \pm dd$;
so behaupte ich, daß $(3b+a)^2 = 2(2b+a)^2 \mp dd$.
Denn die erste Gleichung verwandelt sich in die folgende: $bb = 2ab + aa \mp dd$; welche mit der zweyten identisch ist, wenn man auf beyden Seiten $8bb + 6ab + aa$ addirt.

Um zu beurtheilen, wie bequem diese gebrochene Ausdrüke sind; und wie sehr sie sich, der Kleinheit ihrer Glieder unerachtet, dem Werth der vorgegebenen Wurzel nähern: will ich sie in Decimalbrüche verwandlen, und mit dem unmittelbar gefundenen Decimalwerth von $\sqrt{2}$ vergleichen.

$\sqrt{2} = 1{,}4142136 + \ldots\ldots$

$\frac{1}{1} = 1$

$\frac{3}{2} = 1{,}5$

$\frac{7}{5} = 1{,}4$

$\frac{17}{12} = 1{,}41666666 \ldots\ldots$

$\frac{41}{29} = 1{,}4137 \ldots\ldots$

$\frac{99}{70} = 1{,}41428 \ldots\ldots$

$\frac{239}{169} = 1{,}414201 \ldots\ldots$

$\frac{577}{408} = 1{,}414215 \ldots\ldots$

Der in ziemlich=kleinen Zahlen ausgedrükte Bruch $\frac{99}{70}$ giebt also, in einen Decimalbruch verwandelt, die Quadratwurzel von 2 bis auf die 100000ste Theile genau an.

Anderes Beyspiel. Die Quadratwurzel von Drey betreffend.

Es sey $\sqrt{3} = 2 - z$.

So sind

$$3 = 4 - 4z + zz$$

$$4z - zz = 1;\ z(4-z) = 1;\ z = \frac{1}{4-z} = \cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\ldots}}}}}}}$$

Successive Werthe von z:

$$\frac{1}{4},\ \frac{4}{15},\ \frac{15}{56},\ \frac{56}{209},\ \frac{209}{786},\ \frac{786}{2935},\ \frac{2935}{10954}, \ldots\ldots$$

Successive Werthe von $\sqrt{3}$:

$$\frac{7}{4},\ \frac{26}{15},\ \frac{97}{56},\ \frac{362}{209},\ \frac{1363}{786},\ \frac{5104}{2935},\ \frac{18973}{10954}, \ldots\ldots$$

Man beweißt, wie in dem vorhergehenden Beyspiel: daß diese Brüche wechselsweise größer und kleiner sind als $\sqrt{3}$; und daß die Quadrate ihrer Zähler wechselsweise um eine Einheit größer und kleiner sind, als das Dreyfache der Quadrate ihrer Nenner.

Drittes Beyspiel. $\sqrt{5}$ betreffend.

$$\sqrt{5} = 2 + z$$

$$5 = 4 + 4z + zz$$

$$1 = 4z + zz = z(4+z)$$

$$z = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}}}$$

Successive Werthe von z:

$\frac{1}{4}, \frac{4}{17}, \frac{17}{72}, \frac{72}{305}, \frac{305}{1292}, \frac{1292}{5473}, \ldots$

Successive genäherte Werthe von $\sqrt{5}$:

$\frac{9}{4}, \frac{38}{17}, \frac{151}{72}, \frac{682}{305}, \frac{2889}{1292}, \frac{12238}{5473}, \ldots$

Man beweißt: daß die Quadrate der Zähler dieser Brüche wechselsweise um eine Einheit größer und kleiner sind, als das Fünffache der Quadrate der Nenner.

Statt die Näherung der Quadratwurzel einer Zahl, welche um mehr als um eine Einheit von einer Quadratzahl verschieden ist, unmittelbar zu suchen; ist es oft besser, die Quadratwurzel einer Zahl zu suchen, welche ein Vielfaches einer Quadratzahl, und nur um eine Einheit von einem Quadrat verschieden ist.

Beyspiele. $6 = \frac{24}{4}$; $\sqrt{6} = \frac{\sqrt{24}}{2}$.

$\sqrt{24} = 5 - z$; $24 = 25 - 10z + zz$; $1 = 10z - zz = z(10 - z)$;

$$z = \cfrac{1}{10-\cfrac{1}{10-\cfrac{1}{10-\cfrac{1}{10-\cfrac{1}{10-\cfrac{1}{10-\ldots}}}}}}$$

$z = \frac{1}{10}, \frac{10}{99}, \frac{99}{980}, \frac{980}{9701}, \frac{9701}{96030}, \ldots$

$\sqrt{24} = \frac{49}{10}, \frac{485}{99}, \frac{4801}{980}, \frac{47525}{9701}, \frac{470449}{96030}, \ldots$

$\sqrt{6} = \frac{49}{20}, \frac{485}{198}, \frac{4801}{1960}, \frac{47525}{19402}, \frac{470449}{192060}, \ldots$

Desgleichen: $7 = \frac{63}{9}$;

$$\sqrt{7} = \frac{\sqrt{63}}{3};$$

$$\sqrt{63} = 8 - \cfrac{1}{16 - \cfrac{1}{16 - \cfrac{1}{16 - \cfrac{1}{16 - \cfrac{1}{16 - \dots}}}}}$$

$$= 8,\ \frac{127}{16},\ \frac{2024}{255},\ \frac{32257}{4064},\ \frac{513608}{64709},\ \dots\dots$$

$$\sqrt{7} = \frac{8}{3},\ \frac{127}{48},\ \frac{2024}{765},\ \frac{32257}{12192},\ \frac{513608}{194127}\ \dots\dots$$

Ebenso: $11 = \frac{99}{9}$; $\sqrt{11} = \frac{\sqrt{99}}{3}$.

$$\sqrt{99} = 10 - \cfrac{1}{20 - \cfrac{1}{20 - \cfrac{1}{20 - \cfrac{1}{20 - \cfrac{1}{20 - \dots}}}}}$$

$$= 10,\ \frac{199}{20},\ \frac{3970}{399},\ \frac{79201}{7960},\ \frac{1580050}{158801},\ \dots\dots$$

$$\sqrt{11} = \frac{10}{3},\ \frac{199}{60},\ \frac{3970}{1197},\ \frac{79201}{23880},\ \frac{1580050}{476403}\ \dots\dots$$

Ich will mich jezt bey dieser Lehre nicht länger aufhalten, da ich mir vornehme, in der Folge wieder darauf zurük zu kommen.

Anhang

Ueber Irrationalgrößen von verschiedenen Ordnungen.

§. 66.

Bisher habe ich mich nur mit Quadraten und ihren Wurzeln beschäftiget; und besonders nur von denjenigen

irrationellen oder incommensurablen Größen gehandelt, zu welchen die Ausziehung der Quadratwurzeln führt. Ich will nun noch kurz derjenigen incommensurablen Größen erwähnen, wozu andere mit Zahlengrößen vorzunehmende Operationen Anlaß geben.

Das Product einer dreymal als Factor genommenen Zahl heißt der Würfel oder die dritte Potenz dieser Zahl. Das Product einer viermal als Factor genommenen Zahl heißt ihre vierte Potenz. Das Product einer fünfmal als Factor genommenen Zahl heißt ihre fünfte Potenz.

Allgemein. Das Product einer mmal als Factor genommenen Zahl heißt ihre mte Potenz (Siehe §. 48.)

Natürliche Zahlenreihe

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Quadrate oder zweyte Potenzen

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

Würfel oder dritte Potenzen

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000

Vierte Potenzen

1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000

Fünfte Potenzen

1, 32, 243, 1024, 3125, 7776, 16807, 32768, 59049, 100000

u. s. w.

mte Potenzen $1^m, 2^m, 3^m, 4^m, 5^m, 6^m, 7^m, 8^m, 9^m, 10^m \ldots$

Umgekehrt. Die Zahl, welche dreymal in sich selbst multiplicirt, oder dreymal als Factor genommen, eine vorgelegte Zahl als Product gibt, heißt die Cubikwurzel oder die Wurzel der dritten Ordnung (Potenz) von dieser Zahl. So sind die natürliche Zahlen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...

die Wurzeln der dritten Ordnung von den Zahlen

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000 ....

und allgemein ist a die Cubikwurzel von a^3.

Desgleichen heißt die Zahl, welche viermal in sich selbst multiplicirt, oder viermal als Factor genommen, eine vorgelegte Zahl zum Product gibt, die Wurzel der vierten Ordnung (Potenz) dieser Zahl. So sind die natürliche Zahlen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,..

die Wurzeln der vierten Ordnung von den Zahlen

1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000,..

und allgemein ist a die Wurzel der vierten Ordnung von a^4.

Eben so wird die Zahl, welche fünfmal in sich selbst multiplicirt, oder fünfmal als Factor genommen, eine vorgelegte Zahl zum Product gibt, die Wurzel der fünften Ordnung von dieser Zahl genennt. So sind die natürliche Zahlen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

die Wurzeln der fünften Ordnung von den Zahlen

1, 32, 243, 1024, 3125, 7776, 16807, 32768, 59049, 100000

und allgemein ist a die fünfte Wurzel von a^5.

Die Zahl, welche mmal mit sich selbst multiplicirt, oder mmal als Factor genommen, zum Product eine vorgelegte Zahl gibt, heißt die Wurzel der mten Ordnung (Potenz) von dieser Zahl. So ist a die Wurzel der mten Ordnung von a^m.

Wenn die vorgegebene Zahl sich nicht unter der Form einer Potenz von einer gewißen Ordnung darstellt; so wird ihre Wurzel durch das Zeichen $\sqrt{}$, mit dem darüber geschriebenen Exponenten jener Ordnung angezeigt. So werden die Wurzeln der 3ten, 4ten, 5ten, 6ten .... mten Ordnung von der Zahl n folgendermaßen bezeichnet: $\sqrt[3]{n}$, $\sqrt[4]{n}$, $\sqrt[5]{n}$, $\sqrt[6]{n}$,..... $\sqrt[m]{n}$.

Es ist hier nicht der Ort, das Verfahren zu entwikeln, wodurch man die Wurzeln solcher höhern Ordnungen aus einer gegebenen Zahl auszieht. Ich will nur das von den Quadratwurzeln in Absicht auf ihre Incommensurabilität Bewiesene auf jede höhere Wurzeln ausdehnen.

Lehrsaz. Wenn eine ganze Zahl N keine Wurzel einer gewiesen Ordnung m in ganzen Zahlen hat; so hat sie auch keine in gebrochenen Zahlen.

Die mte Wurzel der Zahl N sey, wenn es möglich ist, genau durch eine gemischte Zahl ausgedrükt. Man verwandle diese gemischte Zahl in einen unächten Bruch; und bringe diesen auf seine einfachste Benennung. Die mten Potenzen der Glieder dieses Bruchs werden nun ebenfalls Primzahlen unter sich seyn; oder die mte Potenz dieses Bruchs gibt einen Bruch, dessen Glieder Primzahlen unter sich sind. Folglich kann dieser Bruch keine ganze Zahl seyn; welches doch seyn müßte, wenn der erste Bruch genau die mte Wurzel der vorgelegten Zahl wäre. Demnach sind

$$\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[3]{6},\ \sqrt[3]{7},\ \sqrt[3]{9},\ \sqrt[3]{10} \ldots\ldots$$

$$\sqrt[4]{2},\ \sqrt[4]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[4]{5},\ \sqrt[4]{6},\ \sqrt[4]{7},\ \sqrt[4]{8},\ \sqrt[4]{9},\ \sqrt[4]{10} \ldots$$

$$\sqrt[5]{2},\ \sqrt[5]{3},\ \sqrt[5]{4},\ \sqrt[5]{5},\ \sqrt[5]{6},\ \sqrt[5]{7},\ \sqrt[5]{8},\ \sqrt[5]{9},\ \sqrt[5]{10} \ldots$$

und allgemein $\sqrt[m]{n}$, incommensurable oder irrationelle Größen, wenn die ganze Zahl n keine mte Wurzel in ganzen Zahlen hat.

Fünftes Capitel.

Aufgaben vom ersten Grade.

§ 67.

Bisher haben wir uns mit Gleichungen beschäftiget, worinn jede unbekannte Größe nur mit bekannten multiplicirt war; oder wo wenigstens, wenn auch in dem Verlauf der Benennungen Glieder vorkamen, welche Producte der unbekannten Größe durch sich selbst, oder einer unbekannten Größe durch andere unbekannte enthielten (wie im §. 26. 27. 39.) diese Glieder doch in der Bedingung, oder gleich zu Anfang der Reduction verschwanden. Diese Eigenschaft zeichnet die Gleichungen vom ersten Grade (die einfachen Gleichungen) aus, womit wir uns bisher beschäftiget haben.

Wenn in dem Ausdruk der Bedingung oder der Bedingungen Glieder vorkommen, welche das Product der unbekannten Größe durch sich selbst, oder Producte zweyer unbekannten Größen in einander enthalten, so daß die Finalgleichung durch keine der vier ersten Operationen der Arithmetik auf den einfachen Ausdruk $ax = b$ gebracht werden kann, sondern diese Gleichung, nachdem man mittelst dieser vier Rechnungsarten das Nöthige zu ihrer möglichsten Vereinfachung gethan hat, das Quadrat xx der unbekannten Größe enthält: so sagt man, diese **Finalgleichung sey vom zweyten Grade**, oder sie heißt eine **quadratische Gleichung**.

Die einfachste Gleichungen vom zweyten Grade sind diejenige, welche nur das Quadrat der unbekannten Größe enthalten, und sich also auf folgenden Ausdruk bringen lassen: $axx - b = 0$. Diese heißen **reine quadratische Gleichungen**. Ihre Auflösung unterscheidet sich von der der Gleichungen des ersten Grades dadurch, daß sie die Ausziehung der Quadratwurzel aus bekannten Größen erfordert.

Denn die Gleichung $axx - b = o$ verwandelt sich in die: $xx = \frac{b}{a}$; woraus $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

Die Größe x ist also rationell oder irrationell, je nachdem $\frac{b}{a}$ eine Quadratzahl ist, oder nicht.

Es sey $\frac{b}{a} = cc$; folglich $xx = cc$, oder $xx - cc = o$. Weil $xx - cc = (x - c)(x + c)$; so hat man $(x + c)(x - c) = o$. Nun verschwindet aber das Product zweyer Größen, wenn die eine oder die andere dieser zwey Größen verschwindet. Folglich kann die Gleichung $(x+c)(x-c)=o$ eben so wohl aus $x - c = o$, folglich $x = c$; als auch aus $x+c = o$, mithin $x = -c$ entstehen. Man thut demnach der Gleichung $xx - cc = o$, oder $xx = cc$ Genüge, wenn man $\left.\begin{matrix} x = +c \\ x = -c \end{matrix}\right\}$ macht; welches kürzer so ausgedrükt wird: $x = \pm c$, oder $x \mp c = o$.

Erster Abschnitt.

Aufgaben, deren Auflösung nur von reinen quadrantischen Gleichungen abhängt.

§. 68.

Aufgabe. Eines Rechteks (Rectangels) Länge ist das Doppelte seiner Breite; und sein Flächeninhalt beträgt 50 Quadratfuß. Welches sind seine Seiten?

Arithmetisch. Weil die Länge das Doppelte der Breite ist, so ist der Flächeninhalt das Doppelte vom Quadrat der Breite. Nun beträgt aber der Flächeninhalt 50 Quadratfuß: folglich ist das Doppelte des Quadrats der Breite, 50 Quadratfuß: und das einfache Quadrat der Breite ist 25 Quadratfuß; die Breite aber beträgt 5 Fuß.

Breite 5
Långe 10
Flåcheninhalt . . 50.

Algebr. Ben. Breite x
Långe . . . . . . $2x$
Flåcheninhalt . . . $2xx$.

Bed. $2xx = 50$.
Red. $1xx = 25$
Aufl. $x = 5$
$2x = 10$
$2xx = 50$.

Anmerkung. Die Auflösung $x = -5$, welche aus dem Factor $x + 5 = 0$ entsteht, den die Gleichung $xx - 25 = 0$ enthålt, hat keinen Einfluß auf die Größe des gesuchten; und zeigt nur eine Veränderung der Richtung der Seiten des Rechteks an.

Andere Beyspiele.

Die Långe ist das Dreyfache, Vierfache, Fünffache der Breite;
Der Flåcheninhalt ist 108, 256, 320 Quadratfuß.
Die Breite ist . . . $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{9}$ der Långe; und
der Flåcheninhalt ist 54, 48, 140, 162 Quadratfuß.

Allgemein. Die Långe und Breite verhalten sich gegen einander, wie die gegebene Zahlen m und n; und der Flåcheninhalt beträgt q Quadratfuß.

Ben. Breite x
Långe . . . . . . $\frac{m}{n}x$
Flåcheninhalt . . . $\frac{m}{n}xx$.

Bed. $\frac{m}{n}xx = q.$

Red. $xx = q \times \frac{n}{m}.$

Aufl. $x = \sqrt{q \times \frac{n}{m}}$

$$\frac{m}{n}x = \frac{m}{n}\sqrt{q \times \frac{n}{m}} = \sqrt{\frac{mm}{nn}} \times \sqrt{q \times \frac{n}{m}} = \sqrt{q \times \frac{m}{n}}.$$

$$\frac{m}{n}xx = \sqrt{q \times \frac{n}{m}} \times \sqrt{q \times \frac{m}{n}} = \sqrt{qq} = q.$$

1. Anmerkung. Dieses Beyspiel führte uns auf die Multiplication zweyer irrationellen Grössen in einander; es ist daher schiklich, die Regel dieser Multiplication zu entwikeln.

Es seyen zwey irrationelle Grössen $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ in einander zu multipliciren: so ist ihr Product $\sqrt{ab}$, oder die Quadratwurzel aus dem Product der beyden hinter dem Wurzelzeichen stehenden Grössen.

Denn es sey $p = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. So ist $\frac{p}{\sqrt{a}} = \sqrt{b}$; $\frac{pp}{a} = b$; $pp = ab$; und $p = \sqrt{ab}$.

2. Anmerkung. Man hätte die gebrochenen Ausdrüke in der Benennung vermeiden können, wenn man die Seiten des Rechteks durch mx und nx bezeichnet hätte. Der Flächeninhalt ist alsdenn

$$mnxx = q.$$

Daher $xx = \frac{q}{mn}$

$$x = \sqrt{\frac{q}{mn}}$$

$$mx = m\sqrt{\frac{q}{mn}} = \sqrt{q \times \frac{m}{n}}$$

$$nx = n\sqrt{\frac{q}{mn}} = \sqrt{q \times \frac{n}{m}};$$ wie vorhin.

§. 69.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden, deren eine das Doppelte der andern, die Differenz ihrer Quadrate aber 75 ist.

Arithmetisch. Weil eine der Zahlen das Doppelte der andern ist: so ist das Quadrat der ersten das Vierfache des Quadrats der andern; und die Differenz ihrer Quadrate ist das Dreyfache des Quadrats der andern. Folglich beträgt das Dreyfache des Quadrats der andern Zahl 75; und das einfache Quadrat dieser andern Zahl ist 25; die Zahl selbst also ist 5.

Kleinere Zahl 5
Größere . . 10

Quadrat { der kleinern Zahl . . 25
{ = größern 100

Differenz . . . . 75.

Algebraisch.

Bey. Kleinere Zahl x
Größere . . $2x$

Quadrat { der größern Zahl $4xx$
{ = kleinern . . xx

Differenz . . . . . $3xx$

Bed. $3xx = 75.$

Red. $xx = 25.$

Aufl. $x = 5$ $\qquad xx = 25$

$2x = 10$ $\qquad 4xx = 100$

$\qquad 3xx = 75.$

Anmerkung. Die Auflösung $x = -5$, $2x = -10$ ändert die respectiven Größen der gesuchten Zahlen nicht; sondern bezeichnet nur den Gegensaz derselben in Beziehung auf die ersten Werthe $\begin{cases} x = +5 \\ 2x = +10 \end{cases}$

Andere

Andere Beyspiele.

Eine Zahl ist das Dreyfache, Vierfache, Fünffache, ... der andern.

Die Differenz ihrer Quadrate ist .... 72, 240, 216, ...

Allgemein. Zwey Zahlen finden, die sich wie m zu n verhalten, wo m größer als n; und deren Differenz der Quadrate der gegebenen Zahl q gleich sey.

Bey. Kleinere Zahl x Quadrate $\begin{cases} xx \\ \frac{mm}{nn}xx \end{cases}$

Größere . . $\frac{m}{n}x$

Differenz $xx\left(\frac{mm}{nn}-1\right)$.

Bed. $xx\left(\frac{mm}{nn}-1\right)=q.$

Red. $xx \times \frac{mm-nn}{nn}=q$

$$xx = q \times \frac{nn}{mm-nn}.$$

Aufl. $x = \sqrt{q} \times \frac{n}{\sqrt{(mm-nn)}}$

$$\frac{m}{n}x = \sqrt{q} \times \frac{m}{\sqrt{(mm-nn)}}$$

$$\frac{mm}{nn}xx = q \times \frac{mm}{mm-nn}$$

$$xx = q \times \frac{nn}{mm-nn}$$

$$xx\left(\frac{mm}{nn}-1\right)=q.$$

Anmerkung. Diese Formeln beziehen sich auf die Voraussezung $m > n$; wornach die positive Größe q der Differenz $\frac{mm-nn}{nn}xx$ gleich ist. Man kann dieselbe aber auch auf die zwey Voraussezungen $m=n$ und $m<n$ anzuwenden suchen.

1.) Es sey $m=n$. Die Gleichung $xx \times \frac{mm-nn}{nn} = q$, wird $xx \times 0 = q$; welches nicht statt finden kann, wenn nicht q Null ist: und alsdenn kann x jede Größe seyn, welches durch das Zeichen der Unbestimmtheit $xx = \frac{0}{0}$ angezeigt wird. Nimmt man aber nicht an, daß zugleich q Null, und $m=n$ sey; so erhält man $xx = \frac{q}{0}$, welches das Zeichen der Unmöglichkeit ist.

2.) Es sey $m < n$: so kann die Gleichung $xx \times \frac{mm-nn}{nn} = q$ nicht bestehen, wenn die Größe q nicht ihr Zeichen ändert; in welchem Fall $xx \times \frac{nn-mm}{nn} = q$. Will man aber darauf bestehen, daß q positiv seyn soll, während daß $m < n$ ist: so verwandelt sich die Gleichung $xx \times \frac{mm-nn}{nn} = q$ in diese: $xx \times \frac{nn-mm}{nn} + q = 0$, oder $xx + q \times \frac{nn}{nn-mm} = 0$; von welcher ich behaupte: daß ihr erster Abschnitt sich nicht in Factoren vom ersten Grade zerlegen läßt; und daß daher die Werthe von x unmöglich sind. Mehrerer Einfachheit halber sey $q \times \frac{nn}{nn-mm} = aa$; so ist zu beweisen: daß $xx + aa$ nicht in Factoren vom ersten Grade zerfällt werden kann.

Denn die zwey Factoren vom ersten Grade, die durch ihre Multiplication eine Formel vom zweyten Grade hervorbringen, sind von folgender Gestalt:

$$(x+a)(x+b)$$
$$(x+a)(x-b)$$
$$(x-a)(x-b)$$

und geben die Formeln:

$$xx + x(a+b) + ab$$
$$xx + x(a-b) - ab$$
$$xx - x(a+b) + ab.$$

Wenn in der ersten und dritten Formel das zweyte Glied verschwindet: so ist $a+b=0$ oder $b=-a$; und diese beyde Formeln werden $xx-aa$. Wenn in der zweyten Formel das zweyte Glied verschwindet: so erhält man $a=b$; und so wird diese Formel $xx-aa$. Alle Formeln vom zweyten Grade, welche kein zweytes Glied haben, und die sich in Factoren vom ersten Grade zerlegen lassen, sind also von der Form $xx-aa$; und daher läßt sich die Formel $xx+aa$ nicht in binomische Factoren zerfällen.

Inzwischen ist man doch darauf bestanden, diese Unzerlegbarkeit symbolisch anzuzeigen. Zu diesem Ende hat man die Formel $xx+aa$ unter der Form $xx-(-aa)=xx-aa(\times-1)$ dargestellt: und indem man auf sie die auf die Formel $xx-aa$ sich beziehende Zerlegung anwendete, stellte man sie unter der Form $(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$ dar. Woraus man für $xx+aa=0$, indem man jeden Factor gleich Null sezte, erhielte $\begin{cases} x+a\sqrt{-1}=0 \\ x-a\sqrt{-1}=0 \end{cases}$, oder $x=\mp a\sqrt{-1}$. Das Zeichen $\sqrt{-1}$ ist also ein neues, von dem $\frac{1}{0}$, welches schon oft vorgekommen ist, verschiedenes Zeichen der Unmöglichkeit. Dieses ist der Ausdruk der Unmöglichkeit, daß zwey Größen, welche als verschieden angenommen worden sind, einander gleich seyen. Jenes ist der Ausdruk der Unmöglichkeit die Formel $xx+aa$ in einfache Factoren zu zerlegen.

Man nennt den Ausdruk $\sqrt{-1}$ imaginär, eingebildet; weil kein reelles Object denselben darstellen kann. Man nennt ihn auch die Quadratwurzel von -1. Eb n so heißt $\sqrt{-aa}$ die Quadratwurzel von $-aa$. Und da $\sqrt{-aa}=\sqrt{(aa\times-1)}=a\sqrt{-1}$: so würde, wenn dem Ausdruk $\sqrt{-1}$ ein reeller Gegenstand entsprechen könnte, auch jedem andern imaginären Ausdruk $\sqrt{-aa}$ ein wirklicher Gegenstand entsprechen.

Gewöhnlich stellt man den Ursprung dieser Unmöglichkeit auf eine von der vorhergehenden etwas verschiedenere

Art vor; indem man sagt: das Quadrat einer Größe, sie möge positiv oder negativ seyn, sey immer positiv; der Ausdruk eines negativen Quadrats sey daher widersprechend. Ich habe geglaubt, auf denjenigen Ursprung dieses Ausdruks zurükgehen zu müssen, der mir der einleuchtendste und den ersten Begriffen der Multiplication angemessenste scheint. Uebrigens werde ich mich in der Folge nach dem eingeführten Gebrauch gemäß ausdrüken; in der Hofnung, daß die Erörterungen, in die ich mich eingelassen habe, den Leser gegen alle falsche Deutungen hinlänglich verwahren werden.

Die Multiplication der imaginären Größen erfordert eine Vorsicht, die hier zu bemerken nöthig ist.

Weil $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ zum Product gibt $\sqrt{ab}$ (§. 68.): so könnte man in Versuchung kommen, die Regel von den Zeichen auf die imaginäre Größen anzuwenden, und zu schliessen $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ sey $= \sqrt{+ab}$.

Da aber $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1}$

und $\sqrt{-b} = \sqrt{b} \times \sqrt{-1}$

so ist $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{ab} \times (\sqrt{-1})^2$. Da nun $\sqrt{-1}$ das Zeichen der Größe seyn soll, deren Quadrat -1 ist: so ist $(\sqrt{-1})^2 = -1$; folglich $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$.

§. 70.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden, deren eine das Doppelte der andern ist, und deren Summe der Quadrate 80 beträgt.

Arithmetisch. Weil die eine Zahl das Doppelte der andern ist: so ist das Quadrat der ersten viermal das Quadrat der zweyten; und die Summe der beyden Quadrate ist fünfmal das Quadrat der zweyten. Nun ist aber Summe dieser Quadrate 80. Folglich macht das fünffache Quadrat der zweyten Zahl 80; das Quadrat der zweyten Zahl selbst ist der fünfte Theil von 80, das ist 16; und die zweyte Zahl ist 4.

Gesuchte Zahlen . . . $\begin{cases} 4 \\ 8 \end{cases}$ Quadrate . . . $\begin{cases} 16 \\ 64 \end{cases}$

Summe . . . . 80.

Algebr. Ben. Kleinere Zahl x
Grössere . . 2x

Quadrate $\begin{cases} xx \\ 4xx \end{cases}$

Summe 5xx.

Bed. $5xx = 80.$

Red. $1xx = 16.$

Aufl. $x = 4$ $\qquad xx = 16$

$2x = 8$ $\qquad 4xx = 64$

$5xx = 80.$

Anmerkung. Die Auflösung $\begin{cases} x = -4 \\ 2x = -8 \end{cases}$ ändert nichts in der verhältnißmäßigen Grösse der gesuchten Zahlen; sondern zeigt nur den Gegensaz dieser lezten Zahlen gegen die erste an.

Allgemein. Zwey Zahlen finden, die sich zu einander verhalten wie m zu n, und deren Summe der Quadrate q ist.

Man findet, daß die Quadrate der gesuchten Zahlen $\frac{mm}{mm+nn} \times q$, und $\frac{nn}{mm+nn} \times q$; die Zahlen selbst aber $\frac{m}{\sqrt{(mm+nn)}} \times \sqrt{q}$, und $\frac{n}{\sqrt{(mm+nn)}} \times \sqrt{q}$ sind.

§. 71.

Aufgabe. Drey Zahlen finden, deren Producte der Multiplication von je zweyen miteinander bekannt sind.

Beyspiel. Product der ersten Zahl in die zweyte 12
. . . . . zweyten . . . dritte 20
. . . . . dritten . . . erste 15.

Arithm. Weil die Producte der zweyten Zahl in die erste und dritte, beziehungsweise 12 und 20 sind; so verhält sich die erste Zahl zur dritten, wie 12 zu 20, oder wie 3 zu 5. Daher verhält sich auch das Quadrat der ersten Zahl zu dem gegebenen Product 15 der ersten in die dritte, wie 3 zu 5, oder wie 9 zu 15. Folglich ist 9 das Quadrat der ersten Zahl; und diese erste Zahl ist 3. Eben so findet man, daß die zweyte und dritte Zahl 4 und 5 sind.

Algebr. Ben. Erste Zahl x

zweyte . . . . . . $\frac{12}{x}$

dritte . . . . . . $\frac{15}{x}$.

Bed. $\frac{12}{x} \times \frac{15}{x} = 20.$

Red. $\frac{3}{x} \times \frac{3}{x} = 1;\ \frac{9}{xx} = 1;\ xx = 9.$

Aufl. $x = 3$

$\frac{12}{x} = 4$

$\frac{15}{x} = 5.$

Probe. $4 \times 5 = 20.$

Allgemein. Die gegebene Producte seyen p, p', p''.

Man findet: erste Zahl . . . . . $\sqrt{\frac{pp''}{p'}} = \frac{\sqrt{pp'p''}}{p'}$

zweyte . . . . . . $\sqrt{\frac{pp'}{p''}} = \frac{\sqrt{pp'p''}}{p''}$

dritte . . . . . . $\sqrt{\frac{p'p''}{p}} = \frac{\sqrt{pp'p''}}{p}$

§. 72.

Aufgabe. Man verlangt vier Zahlen, wovon man kennt

das Product der ersten in die zweyte . . . . . . p,

. . . . . . zweyten in die dritte . . . . . . p',

. . . . . . dritten in die vierte . . . . . . p'',

. . . . . . vierten in die erste . . . . . . p'''.

Diese Aufgabe, welche eine große Aehnlichkeit mit der vorigen zu haben scheint, ist dennoch wesentlich von ihr ver-

schieden; indem sie nothwendig entweder unmöglich, oder unbestimmt ist. Denn nach der ersten und zweyten Bedingung steht die erste Zahl zur dritten in dem Verhältniß von p zu p': und nach der dritten und vierten Bedingung verhält sich die dritte Zahl zur ersten, wie p'' zu p'''.

Die Aufgabe ist daher unbestimmt, wenn das Verhältniß von p zu p' dem Verhältniß von p''' zu p'' gleich ist; und sie ist unmöglich, wenn diese Gleichheit der Verhältnisse nicht statt hat.

§ 73.

Aufgabe. Fünf Zahlen finden, welche durch folgende Bedingungen bestimmt werden:

Das Product der ersten in die zweyte ist p
. . . . . zweyten in die dritte ist p'
. . . . . dritten in die vierte ist p''
. . . . . vierten in die fünfte ist p'''
. . . . . fünften in die erste ist p^{IV}.

Arithmetisch. Nach den vier ersten Bedingungen verhält sich die erste Zahl zur fünften, wie pp'' zu $p'p'''$. Ihr Product aber ist p^{IV}. Die Aufgabe ist also auf den § 68. reducirt: Zwey Zahlen finden, deren Verhältniß und Product man kennt.

Man findet: Quadrate der ersten Zahl . . . $\frac{pp''p^{IV}}{p'p'''}$

. . . . zweyten . . . $\frac{p'p'''p}{p''p^{IV}}$

. . . . dritten . . . $\frac{p''p^{IV}p'}{p'''p}$

. . . . vierten . . . $\frac{p'''pp''}{p^{IV}p'}$

. . . . fünften . . . $\frac{p^{IV}p'p'''}{pp''}$

Algebr.	Erste Zahl	. . . . . .	x
	zweyte	. . . . . .	$\frac{p}{x}$
	dritte	. . . . . .	$\frac{p'x}{p}$
	vierte	. . . . . .	$\frac{p''p}{p'x}$
	fünfte	. . . . . .	$\frac{p'''p'x}{p''p}$.

Bed. $\frac{p'''p'x}{p''p}x = p^{iv}$.

Red. $xx = \frac{pp''p^{iv}}{p'p'''}$ Quadrat der ersten Zahl.

Aufl. $x = \sqrt{\frac{pp''p^{iv}}{p'p'''}} = \frac{\sqrt{pp'p''p'''p^{iv}}}{p'p'''}$

$$\frac{p}{x} = \sqrt{\frac{p'p'''p}{p''p^{iv}}} = \frac{\sqrt{pp'p''p'''p^{iv}}}{p''p^{iv}}$$

$$\frac{p'x}{p} = \sqrt{\frac{p''p^{iv}p'}{p'''p}} = \frac{\sqrt{pp'p''p'''p^{iv}}}{p'''p}$$

$$\frac{p''p}{p'x} = \sqrt{\frac{p'''pp''}{p^{iv}p'}} = \frac{\sqrt{pp'p''p'''p^{iv}}}{p^{iv}p'}$$

$$\frac{p'''p'x}{p''p} = \sqrt{\frac{p^{iv}p'p'''}{pp''}} = \frac{\sqrt{pp'p''p'''p^{iv}}}{pp''}$$

Probe. $\sqrt{\frac{pp''p^{iv}}{p'p'''}} \times \sqrt{\frac{p^{iv}p'p'''}{pp''}} = p^{iv}$.

Folgende Aufgabe ist entweder unmöglich oder unbestimmt:

Sechs Zahlen finden unter folgenden Bedingungen:

Das Product der ersten in die zweyte ist p
. . . . . zweyten . . dritte ist p'
. . . . . dritten . . vierte ist p''
. . . . . vierten . . fünfte ist p'''
. . . . . fünften . . sechste ist p^{iv}
. . . . . sechsten . . erste ist p^{v}.

Zufolge der vier ersten Bedingungen verhält sich nämlich die erste Zahl zur fünften wie pp'' zu $p'p'''$: und den zwey lezten Bedingungen zufolge verhält sich die fünfte Zahl zur ersten wie p^{IV} zu p^{V}.

Demnach ist die Aufgabe unbestimmt, wenn das Verhältniß von pp'' zu $p'p'''$ dem von p^{V} zu p^{IV} gleich ist; und sie ist unmöglich, wenn diese Gleichheit nicht statt hat.

Im allgemeinen sind die den bisherigen ähnliche Aufgaben bestimmt, wenn die Anzahl der Größen ungerad ist; hingegen sind sie unbestimmt oder unmöglich, wenn die Anzahl der Größen gerad ist.

§ 74.

Aufgabe. Drey Zahlen finden, wovon das Product einer jeden durch die Summe der zwey andern bekannt ist.

Die gesuchte Zahlen seyen x, y, z; und die drey gegebene Producte p, p', p''.

Bed. $$\begin{cases} x(y+z)=p \\ y(x+z)=p' \\ z(x+y)=p''. \end{cases}$$

Red. $$\begin{aligned} xy+xz &= p \\ xy+yz &= p' \\ xz+yz &= p'' \\ 2xy+2xz+2yz &= p+p'+p'' \\ xy+xz+yz &= \frac{p+p'+p''}{2}. \end{aligned}$$

Zieht man von dieser Gleichung nach und nach jede der drey ersten ab; so erhält man

$$yz = \frac{-p+p'+p''}{2}$$

$$xz = \frac{p-p'+p''}{2}$$

$$xy = \frac{p+p'-p''}{2}.$$

Und so ist die vorgelegte Aufgabe auf die § 71 reducirt: Drey Zahlen finden, deren Producte von je zwey und zweyen bekannt sind. Man erhält:

$$x = \frac{\sqrt{\left(\frac{-p+p'+p''}{2} \times \frac{p-p'+p''}{2} \times \frac{p+p'-p''}{2}\right)}}{\frac{-p+p'+p''}{2}}$$

$$= \frac{\frac{p-p'+p''}{2} \times \frac{p+p'-p''}{2}}{\sqrt{\left(\frac{-p+p'+p''}{2} \times \frac{p-p'+p''}{2} \times \frac{p+p'-p''}{2}\right)}}$$

$$y = \frac{\sqrt{\left(\frac{-p+p'+p''}{2} \times \frac{p-p'+p''}{2} \times \frac{p+p'-p''}{2}\right)}}{\frac{p-p'+p''}{2}}$$

$$= \frac{\frac{-p+p'+p''}{2} \times \frac{p+p'-p''}{2}}{\sqrt{\left(\frac{-p+p'+p''}{2} \times \frac{p-p'+p''}{2} \times \frac{p+p'-p''}{2}\right)}}$$

$$z = \frac{\sqrt{\left(\frac{-p+p'+p''}{2} \times \frac{p-p'+p''}{2} \times \frac{p+p'-p''}{2}\right)}}{\frac{p+p'-p''}{2}}$$

$$= \frac{\frac{-p+p'+p''}{2} \times \frac{p-p'+p''}{2}}{\sqrt{\left(\frac{-p+p'+p''}{2} \times \frac{p-p'+p''}{2} \times \frac{p+p'-p''}{2}\right)}}$$

$$x+y = \frac{p'' \times \frac{p+p'-p''}{2}}{\sqrt{\left(\frac{-p+p'+p''}{2} \times \frac{p-p'+p''}{2} \times \frac{p+p'-p''}{2}\right)}}$$

$$x+z = \frac{p' \times \frac{p-p'+p''}{2}}{\sqrt{\left(\frac{-p+p'+p''}{2} \times \frac{p-p'+p''}{2} \times \frac{p+p'-p''}{2}\right)}}$$

$$y+z = \frac{p \times \frac{-p+p'+p''}{2}}{\sqrt{\left(\frac{-p+p'+p''}{2} \times \frac{p-p'+p''}{2} \times \frac{p+p'-p''}{2}\right)}}$$

$$x(y+z) = p$$
$$y(x+z) = p'$$
$$z(x+y) = p''.$$

§. 75.

Aufgabe. Drey Zahlen x, y, z finden, wovon das Product einer jeden in die Differenz der zwey andern bekannt sind.

Bed. $\begin{cases} x(y-z) = p \\ y(x-z) = p' \\ z(x-y) = p''. \end{cases}$

Diese Aufgabe, welche viel ähnliches mit der vorhergehenden zu haben scheint, ist dennoch wesentlich von derselben verschieden; indem sie entweder unbestimmt, oder unmöglich ist.

Denn weil $xy - xz = p$
und $xy - yz = p'$

so ist $xz - yz = p' - p$
Oder $z(x-y) = p' - p$
aber $z(x-y) = p''$.

Daher ist die Aufgabe unbestimmt, wenn $p' - p = p''$, oder $p - p' + p'' = 0$; und unmöglich, wenn diese Gleichheit nicht statt hat.

§. 76.

Drey Zahlen finden, wenn man die Producte einer derselben in jede der zwey andern, und die Summe oder Differenz der Quadrate der zwey leztern kennt.

Bezeichnung. $\begin{cases} xy = p \\ xz = p' \\ yy \pm zz = q. \end{cases}$

Demnach: $y : z = p : p'$
$yy \pm zz = q.$

Die Aufgabe ist also auf die § 69. 70. reducirt: zwey Zahlen finden, deren Verhältniß, und die Summe oder Differenz ihrer Quadrate bekannt ist.

§. 77.

Aufgabe. Drey Zahlen x, y, z finden, davon die Quotienten der Division der Producte jeder zwey durch die dritte bekannt sind.

Die gegebenen Quotienten seyen q, q', q''.

Bed. $\begin{cases} \frac{xy}{z} = q \\ \frac{xz}{y} = q' \\ \frac{yz}{x} = q''. \end{cases}$

Red. $\frac{y}{z} : \frac{z}{y} = q:q'$; oder $yy:zz = q:q'$; oder $y:z = \sqrt{q} : \sqrt{q'}$

$x \times \frac{y}{z} = x \times \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q'}}$; folglich $x \times \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q'}} = q.$

Aufl. $x = \sqrt{qq'}$

$y = \sqrt{qq''}$

$z = \sqrt{q'q''}$

$xy = q\sqrt{q'q''}$; $\frac{xy}{z} = q$

$xz = q'\sqrt{qq''}$; $\frac{xz}{y} = q'$

$yz = q''\sqrt{qq'}$; $\frac{yz}{x} = q''.$

Beyspiel. Es sey $q = 8$ $x = \sqrt{8.18} = 12$

$q' = 18$ $y = \sqrt{8.50} = 20$

$q'' = 50$ $z = \sqrt{18.50} = 30.$

§. 78.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden, deren Differenz 12, und deren Product 64 ist.

Durch Räsonnement. Da das Product der Summe durch die Differenz zweyer Zahlen, der Differenz ihrer Quadrate gleich ist (§ 26. n. 5.): so ist das Product zweyer Zahlen der Differenz der Quadrate ihrer halben Summe und ihrer halben Differenz gleich. Oder, das Quadrat der halben Summe zweyer Zahlen ist der Summe ihres Products und des Quadrats ihrer halben Differenz gleich. Folglich ist das Quadrat der halben Summe der zwey gesuchten Zahlen, der Summe von 36 und 64, oder 100 gleich. Die halbe Summe der zwey gesuchten Zahlen ist also 10.

Halbe Summe der zwey gesuchten Zahlen . . .	10
Halbe Differenz	6
Gesuchte Zahlen	$10+6=16$
	$10-6=4$
Product dieser Zahlen	$4\times16=64$.

Algebraisch.

Ben.	Summe der zwey gesuchten Zahlen . . .	$2s$
	gesuchte Zahlen	$s+6$
		$s-6$
	Product dieser Zahlen	$ss-36$.

Bed. $ss-36 = 64$.

Red. $ss = 100$.

Aufl. $s = \pm 10$

$$s+6=\begin{cases}16\\-4\end{cases},\ s-6=\begin{cases}4\\-16\end{cases},\ ss-36=64.$$

Die aus der Gleichung $s+10=0$, oder $s=-10$, hergeleitete Auflösung ändert also die respectiven Größen der zwey gesuchten Zahlen nicht; sondern gibt nur den Gegensaz derselben gegen die aus der Gleichung $s-10=0$ oder $s=10$ entspringende an.

Allgemein. Zwey Zahlen finden, deren Differenz 2d, und deren Product p ist.

Ben. Gesuchte Summe beyder Zahlen . . . 2s
gesuchte Zahlen . . . . s+d
s−d
Product . . . . ss−dd.

Bed. $ss - dd = p.$

Red. $ss = p + dd$ oder $ss - (p+dd) = 0$
folglich $(s + \sqrt{(p+dd)})(s - \sqrt{(p+dd)}) = 0.$

Also $\begin{matrix} s - \sqrt{(p+dd)} = 0 \\ s + \sqrt{(p+dd)} = 0 \end{matrix}$ und $s = \pm\sqrt{(p+dd)}$

Aufl. $s = \pm\sqrt{(p+dd)}$ $s + d = \pm\sqrt{(p+dd)} + d$
$s - d = \pm\sqrt{(p+dd)} - d$
$ss - dd = (p+dd) - dd = p.$

Ist also die Differenz zweyer Zahlen und ihr Product bekannt: so erhält man das Quadrat ihrer halben Summe, indem man die Summe ihres Products und des Quadrats ihrer halben Differenz nimmt: und die halbe Summe dieser Zahlen ist die Quadratwurzel jener Summe mit dem vorgesezten Zeichen der Addition oder der Subtraction.

Anmerkung. Man könnte auch unmittelbar die zwey verlangte Zahlen suchen. Sie seyn x und y. So hat man die zwey Bedingungen $\begin{cases} x - y = 2d \\ xy = p \end{cases}$. Man quadrire die beyden Theile der ersten Gleichung, und nehme das Vierfache der Theile der zweyten: so erhält man

$$xx - 2xy + yy = 4dd$$
$$4xy = 4p.$$

Man addire die Glieder dieser zwey Gleichungen
$$xx + 2xy + yy = 4dd + 4p = 4(p+dd)$$
Hieraus ergiebt sich $x + y = 2\sqrt{(p+dd)}$
Es ist aber . . . $x - y = 2d$
Folglich . . . $2x = 2\sqrt{(p+dd)} + 2d$

$$2y = 2\sqrt{(p+dd)} - 2d$$
$$x = \sqrt{(p+dd)} + d$$
$$y = \sqrt{(p+dd)} - d.$$

Beyspiele.

Es sey $2d = 8$. So werden $\sqrt{(p+dd)} = \sqrt{(180+16)}$
$p = 180$ $= \sqrt{196} = 14$
$x = 14 + 4 = 18$
$y = 14 - 4 = 10.$

Ferner seyen $2d = 12$; $2d = 16$
$p = 640$; $p = 1536$.

§. 79.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden, deren Summe 24, und deren Product 128 ist.

Durch Räsonnement. Weil das Quadrat der halben Summe zweyer Zahlen, der Summe ihres Products und des Quadrats ihrer halben Differenz gleich ist (§. 78.): so ist das Quadrat der halben Differenz der zwey Zahlen der Ueberschuß des Quadrats ihrer halben Summe über ihr Product. Da nun ihr Product 128, und ihre halbe Summe 12 ist, wovon das Quadrat 144 macht: so ist das Quadrat ihrer halben Differenz 16; folglich ihre halbe Differenz 4: und die zwey gesuchte Zahlen sind $12 + 4 = 16$
$12 - 4 = 8$
Product . . . . 128.

Algebraisch.

Ben. Gesuchte Differenz der zwey Zahlen . . . $2d$

gesuchte Zahlen . . . . . $\begin{cases} 12 - d \\ 12 + d \end{cases}$

Product . . . . . . $144 - dd$

Bed. $144 - dd = 128.$

Red. $144 = 128 + dd$

$16 = dd$; oder $dd - 16 = 0$;

$(d-4)(d+4) = 0$.

Es sey $d - 4 = 0$; so ist $d = 4$

$d + 4 = 0$, $d = -4$.

Aufl. $d = \pm 4$; $12 + d = \begin{cases}16\\8\end{cases}$; $12 - d = \begin{cases}8\\16\end{cases}$;

$144 - dd = \begin{Bmatrix}16 \times 8\\8 \times 16\end{Bmatrix} = 128$.

Anmerkung. Die zwey gesuchte Zahlen wechseln gegen einander ab; und man hat eben so wenig Grund dazu, die eine die grössere, und die andere die kleinere zu nennen, als zu dem Gegentheil. Ihre beyden Werthe haben das Zeichen der Addition vor sich; da hingegen in der vorigen Aufgabe die gesuchte Zahlen, bey Verwechslung ihrer Werthe, das einemal das Zeichen der Addition, das anderemal das der Subtraction hatten.

Allgemein. Zwey Zahlen finden, deren Summe 2s und deren Product p ist.

Ben. Gesuchte Differenz der zwey Zahlen . . 2d

gesuchte Zahlen . . . . . $\begin{cases}s+d\\s-d\end{cases}$

Product . . . . . . $ss - dd$.

Bed. $ss - dd = p$.

Red. $ss = p + dd$

$ss - p = dd$, oder $dd - (ss - p) = 0$.

1.) Es sey $ss = p$: so wird $dd = 0$; $d = 0$; $\begin{matrix}s+d\\s-d\end{matrix} = s$.

2.) Es sey $ss > p$: so sind $dd - (ss - p) = 0$;
$(d + \sqrt{(ss-p)})(d - \sqrt{(ss-p)}) = 0$,

und

und $d-\sqrt{(ss-p)}=0$ giebt $d=\sqrt{(ss-p)}$
$d+\sqrt{(ss-p)}=0$ . . $d=-\sqrt{(ss-p)}$
folglich $d=\pm\sqrt{(ss-p)}$.

Aufl. $d=\pm\sqrt{(ss-p)}$; $\begin{matrix} s+d=s+\sqrt{(ss-p)} \\ s-d=s-\sqrt{(ss-p)} \end{matrix}$;

$$ss-dd=ss-(ss-p)=p.$$

3.) Es sey $ss<p$; folglich $dd+(p-ss)=0$. Die Grösse $dd+(p-ss)$ läßt sich aber nicht in Factoren vom ersten Grade zerlegen: folglich ist der Werth von d unmöglich; und man erhält

$$\left.\begin{matrix} d-\sqrt{(p-ss)}\times\sqrt{-1}=0 \\ d+\sqrt{(p-ss)}\times\sqrt{-1}=0 \end{matrix}\right. ; \quad \begin{matrix} d=\pm\sqrt{(p-ss)}\times\sqrt{-1} \\ =\pm\sqrt{(ss-p)}. \end{matrix}$$

1. Anmerkung. Die für die Voraussezung $ss>p$ gefundene Formel $d=\sqrt{(ss-p)}$ belehrt uns (ohne besondere Entwiklung des 3ten Falls): daß die vorgelegte Aufgabe eine Gränze hat; nämlich daß das gegebene Product nicht grösser seyn darf als das Quadrat der halben gegebenen Summe der zwey gesuchten Zahlen. Dies stimmt mit dem Saz überein, der bey der Auflösung der zwey lezten Aufgaben zum Grund gelegt wurde: daß das Quadrat der halben Summe zweyer Zahlen der Summe ihres Products und des Quadrats ihrer halben Differenz gleich seye; $ss=p+dd$.

Beyspiele.

Es sey $\begin{matrix} 2s=24 \\ p=140 \end{matrix}$: so werden $d=\pm\sqrt{(144-140)}=\pm 2$.

$$s+d=\begin{cases}14\\10\end{cases}; \quad s-d=\begin{cases}10\\14\end{cases}.$$

Es sey $\begin{matrix} 2s=20 \\ p=101 \end{matrix}$: so werden $d=\pm\sqrt{(100-101)}=\pm\sqrt{-1}$.

$$s+d=10\pm\sqrt{-1}; \quad s-d=10\mp\sqrt{-1}.$$

Die Aufgabe ist also unmöglich. Inzwischen entsprechen die zwey Ausdrüke $10+\sqrt{-1}$ und $10-\sqrt{-1}$ den vorgegebenen

Bedingungen: ihre Summe ist nämlich 20; und ihr Product ist $100-(-1)=100+1=101$. Die entgegengesezte Zeichen vor sich habende imaginäre Größen heben sich, sowohl bey der Addition als in dem Product, gegen einander auf.

2. Anmerkung. Man kann, wie bey der vorhergehenden Aufgabe, die zwey verlangte Zahlen unmittelbar suchen. Sie seyen x und y: so hat man die Bedingungen

$$x+y=2s$$
$$xy=p.$$

Man quadrire beyde Seiten der ersten Gleichung; und nehme auf beyden Seiten das Vierfache von der zweyten: so bekommt man

$$xx+2xy+yy=4ss$$
$$4xy=4p.$$

Von der ersten Gleichung ziehe man nun die zweyte ab; so ergiebt sich

$$xx-2xy+yy=4ss-4p=4(ss-p)$$

folglich . . . $x-y=\pm 2\sqrt{(ss-p)}$.

Es ist aber . . $x+y=2s$

demnach . . . $2x=2s\pm 2\sqrt{(ss-p)}$

$$2y=2s\mp 2\sqrt{(ss-p)}$$
$$x=s\pm\sqrt{(ss-p)}$$
$$y=s\mp\sqrt{(ss-p)}$$
$$xy=ss-(ss-p)=p.$$

3. Anmerkung. Die in den zwey lezten Paragraphen aufgelöste Aufgaben lassen sich unter folgenden Ausdruk zusammenfassen: zwey Zahlen finden, deren Summe oder Differenz, und Product gegeben sind. Ihre Auflösung ist in der Gleichung $ss=p+dd$ enthalten. Ihre Beziehung auf die Aufgaben vom zweyten Grade ist sehr bedeutend;

und wir werden in der Folge zeigen, daß man die Auflösung aller quadratischen Gleichungen auf sie zurükführen kann.

§. 80.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden, deren Unterschied 12, und die Summe der Quadrate 1424 ist.

Die Leichtigkeit, mit welcher die vorhergehende Aufgaben aufgelöst worden sind, indem man sie auf die Untersuchung der $\left\{\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{matrix}\right\}$ der unbekannten Größen reducirte, je nachdem ihre $\left\{\begin{matrix}\text{Differenz}\\ \text{Summe}\end{matrix}\right\}$ gegeben war, muß uns veranlassen, auch hier das nämliche Verfahren zu versuchen.

Es sey $2s$ die Summe der zwey gesuchten Zahlen. So sind

die gesuchte Zahlen $\left\{\begin{matrix}s+6\\ s-6\end{matrix}\right.$; ihre Quadrate $\left\{\begin{matrix}ss+12s+36\\ ss-12s+36\end{matrix}\right.$

Summe derselben $2ss \quad +72.$

Bed. $2ss+72=1424.$

Red. $ss+36=712;\ ss-676=0;$

folglich $\left\{\begin{matrix}s-26=0\\ s+26=0\end{matrix}\right.$ $s=\pm 26.$

Aufl. $s=\pm 26;\quad s+6=\left\{\begin{matrix}32\\ -20\end{matrix}\right.;\ s-6=\left\{\begin{matrix}20\\ -32\end{matrix}\right.$

$$ss+12s+36=\left\{\begin{matrix}1024\\ 400\end{matrix}\right.$$

$$ss-12s+36=\left\{\begin{matrix}400\\ 1024\end{matrix}\right.$$

$$2ss \quad +72= \quad 1424.$$

Anmerkung. Die aus dem Factor $s+26=0$ entstehende Auflösung $s=-26$, ändert die Größen der verlangten Zahlen nicht, sondern nur ihre Zeichen.

Allgemein. Zwey Zahlen finden, deren Differenz $2d$, und die Summe der Quadrate $2q$ ist.

Ben. Gesuchte Summe $2s$; gesuchte Zahlen $\begin{cases} s+d \\ s-d \end{cases}$;

$$\text{Quadrate} \begin{cases} ss+2ds+dd \\ ss-2ds+dd \end{cases}$$

$$\text{Summe } 2ss+2dd.$$

Bed. $2ss+2dd=2q$.

Red. $ss+dd=q$

$$ss=q-dd.$$

Aufl. $s=\pm\sqrt{(q-dd)}$;

$$s+d=\pm\sqrt{(q-dd)}+d;\quad ss+2ds+dd=q\pm 2d\sqrt{(q-dd)}$$

$$s-d=\pm\sqrt{(q-dd)}-d;\quad ss-2ds+dd=q\mp 2d\sqrt{(q-dd)}$$

$$2ss+2dd=2q.$$

Erste Anmerkung. Der Ausdruk $2ss+2dd$ der Summe der Quadrate der zwey Größen, deren $\begin{matrix} \text{Summe } 2s \\ \text{Differenz } 2d \end{matrix}\Big\}$ ist, belehrt uns: daß die Summe der Quadrate zweyer Zahlen der doppelten Summe der Quadrate ihrer halben Summe und halben Differenz gleich ist.

Zweyte Anmerkung. Die Summe der Quadrate zweyer Zahlen ist also größer, als das doppelte Quadrat ihrer halben Differenz. Damit also die vorgelegte Aufgabe möglich sey; muß die gegebene Summe der Quadrate nicht kleiner seyn, als das doppelte Quadrat der gegebenen halben Differenz der zwey Zahlen. Ist jene Summe kleiner als dieses Doppelte; so belehrt uns die Algebra von dem Widerspruch der gegebenen Bedingungen, oder von der Unmöglichkeit der Aufgabe, durch die Einführung des Zeichens einer imaginären Größe. Ist nämlich $2q < 2dd$, oder $q < dd$; so drükt die Bezeichnung $\sqrt{(q-dd)}$ eine unmögliche Größe aus (§. 69.)

Dritte Anmerkung. Bezeichnet man die gesuchte Zahlen durch x und y; so ist folgende Art die einfachste sie unmittelbar zu bestimmen:

Bed. $\begin{cases} x - y = 2d \\ xx + yy = 2q. \end{cases}$

Red. Man quadrire die erste Gleichung auf beyden Seiten $xx - 2xy + yy = 4dd$

diese Gleichung ziehe man von der verdoppelten zweyten ab . . . . . . $2xx + 2yy = 4q$

so erhält man . . . $xx + 2xy + yy = 4q - 4dd$

oder . . . . $(x+y)^2 = 4(q-dd)$

Hieraus: $x+y = \pm 2\sqrt{(q-dd)}$

aber $x-y = 2d$

folglich: $2x = \pm 2\sqrt{(q-dd)} + 2d$. $x = \pm\sqrt{(q-dd)} + d$

$2y = \pm 2\sqrt{(q-dd)} - 2d$; $y = \pm\sqrt{(q-dd)} - d$

wie zuvor.

Vierte Anmerkung. Geometrisch betrachtet heißt diese Aufgabe: Ein rechtwinkliches Dreyek finden, dessen Hypothenuse und Differenz der Seiten um den rechten Winkel gegeben sind.

§. 81.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden, deren Summe 2s, und die Summe ihrer Quadrate 2q bekannt sind.

Bezeichnet man die Differenz der zwey gesuchten Zahlen durch 2d: so ist, wie im vorigen §, $2ss + 2dd$ die Summe der Quadrate: und die Gleichung $2ss + 2dd = 2q$

oder $ss + dd = q$

giebt die Beziehung an, welche zwischen der Summe und der Differenz der zwey Größen und der Summe ihrer Quadrate statt hat; so daß, wenn zwey dieser drey Größen gegeben sind, auch die dritte bestimmt ist.

Besonders erhält man $d = \pm\sqrt{(q-ss)}$.

Der kleinste Werth von q in Beziehung auf ss ist also der $q = ss$; für welchen $d = 0$ wird: und wenn man eine gegebene Größe das einemal in zwey gleiche, und das andremal in zwey ungleiche Theile theilt; so übersteigt die Summe der Quadrate der zwey ungleichen Theile die Summe der Quadrate der zwey gleichen Theile, um das Doppelte Quadrat der Differenz zwischen einem der gleichen und einem der ungleichen Theile, oder um das doppelte Quadrat der halben Differenz der zwey ungleichen Theile.

Geometrisch betrachtet heißt die vorgelegte Aufgabe: Ein rechtwinkliches Dreyek finden, dessen Hypothenuse und die Summe der Seiten um den rechten Winkel gegeben sind.

§. 82.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden, deren Summe oder Differenz, und die Summe oder Differenz ihrer Quadrate und ihres Products bekannt sind.

2s und 2d seyen die Summe und die Differenz der zwey Zahlen.

So ist die Summe ihrer Quadrate . . $2ss + 2dd$

ihr Product . . . . $ss - dd$

die $\left[\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{matrix}\right]$ der Summe ihrer Quadrate und ihres Products . . $\left[\begin{matrix}3ss + dd\\ ss + 3dd\end{matrix}\right.$.

Wenn also diese Summe oder Differenz durch eine gegebene Größe, die ich q nennen will, bezeichnet wird; so hat man eine von den zwey Gleichungen $\left[\begin{matrix}3ss + dd = q\\ ss + 3dd = q\end{matrix}\right]$ aufzulösen. Die gegenseitige Beziehung der Summe und der Differenz der zwey gesuchten Zahlen, und der Summe oder der Differenz der Summe ihrer Quadrate und ihres Pro-

ducts ist also durch folgende unter einander symmetrische Gleichungen bestimmt:

Zufolge der ersten Gleichung, ist

	s ausgedrükt in q und d	$s = \pm\sqrt{\left(\frac{q-dd}{3}\right)}$
	d . . . . q und s	$d = \pm\sqrt{(q-3ss)}$
. . . . zweyten	. . . .	$s = \pm\sqrt{(q-3dd)}$
	. . . .	$d = \pm\sqrt{\left(\frac{q-ss}{3}\right)}$.

Allgemeinere Aufgabe. Zwey Zahlen finden, deren Summe oder Differenz, und die Summe oder Differenz der Summe ihrer Quadrate und einer Größe, die zu ihrem Product ein gegebenes Verhältniß hat, bekannt sind.

Anmerkung. Diese lezte Aufgabe enthält, geometrisch betrachtet, folgende: Ein Dreyek finden, dessen eine Seite, der ihr entgegengesezte Winkel, und die Summe oder Differenz der zwey andern Seiten gegeben sind.

§ 83.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden, deren Summe der Quadrate q und das Product p man kennt.

Durch Räsonnement. Weil das Product der zwey gesuchten Zahlen p ist; so ist das Doppelte ihres Products 2p. Und weil die Summe ihrer Quadrate q ist: so ist die $\left[\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{matrix}\right]$ der Summe ihrer Quadrate und ihres doppelten Products $\left[\begin{matrix}q+2p\\ q-2p\end{matrix}\right]$. Folglich ist das Quadrat der $\left[\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{matrix}\right]$ der zwey gesuchten Zahlen $\left[\begin{matrix}q+2p\\ q-2p\end{matrix}\right]$. Man hat also für die $\left[\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{matrix}\right]$ der zwey gesuchten Zahlen $\left[\begin{matrix}\sqrt{(q+2p)}\\ \sqrt{(q-2p)}\end{matrix}\right]$.

Gesuchte Zahlen : $\frac{\sqrt{(q+2p)}+\sqrt{(q-2p)}}{2}$

$\frac{\sqrt{(q+2p)}-\sqrt{(q-2p)}}{2}$

Summe der Quadrate $\frac{2(q+2p)+2(q-2p)}{4}=\frac{4q}{4}=q.$

Product . . . . $\frac{(q+2p)-(q-2p)}{4}=\frac{4p}{4}=p.$

Algebraisch.

Ben. Summe der zwey gesuchten Zahlen $2s$, Differenz . . . . . . $2d$;

gesuchte Zahlen . . . . . . $\begin{cases} s+d \\ s-d \end{cases}$

Quadrate $\begin{cases} ss+2ds+dd \\ ss-2ds+dd \end{cases}$; Product $ss-dd$

Summe $2ss \quad +2dd.$

Bed. $2ss+2dd=q$

$ss- \quad dd=p.$

Red. Verdoppelt man beyde Seiten der zweyten Gleichung; so erhält man

$2ss+2dd=q$

$2ss-2dd=2p.$

Addirt man die zwey Gleichungen, und zieht man die zweyte von der ersten ab; so ergibt sich

$$4ss \quad =q+2p; \; 2s=\pm\sqrt{(q+2p)}; \; s=\pm\frac{\sqrt{(q+2p)}}{2}$$
$$4dd=q-2p, \; 2d=\pm\sqrt{(q-2p)}, \; d=\pm\frac{\sqrt{(q-2p)}}{2}.$$

Die vorgelegte Aufgabe läßt also folgende vier Auflösungen zu:

Erste Zahl	Zweyte Zahl
$\frac{\sqrt{(q+2p)}+\sqrt{(q-2p)}}{2}$	$\frac{\sqrt{(q+2p)}-\sqrt{(q-2p)}}{2}$
$\frac{\sqrt{(q+2p)}-\sqrt{(q-2p)}}{2}$	$\frac{\sqrt{(q+2p)}+\sqrt{(q-2p)}}{2}$
$\frac{-\sqrt{(q+2p)}+\sqrt{(q-2p)}}{2}$	$\frac{-\sqrt{(q+2p)}-\sqrt{(q-2p)}}{2}$
$\frac{-\sqrt{(q+2p)}-\sqrt{(q-2p)}}{2}$	$\frac{-\sqrt{(q+2p)}+\sqrt{(q-2p)}}{2}$

In den zwey ersten Auflösungen nimmt eine der zwey Zahlen die Stelle der andern ein. Eben so ist es bey den zwey lezten.

Die erste und vierte Auflösung sind nur in den Zeichen verschieden: Ebenso die zweyte und dritte.

Anmerkung. Damit die Aufgabe möglich sey, muß $q \overline{\gtrless} 2p$ seyn. Wenn nämlich zwey Zahlen gleich sind; so ist die Summe ihrer Quadrate das Doppelte ihres Products: und wenn sie ungleich sind; so ist die Summe ihrer Quadrate größer als ihr doppeltes Product.

Denn $aa - 2ab + bb = (a-b)^2 \overline{\gtrless} 0$
folglich $aa \quad + bb \overline{\gtrless} 2ab$;
und der Ueberschuß der Quadrate zweyer ungleichen Zahlen über ihr doppeltes Product ist dem Quadrat ihrer Differenz gleich.

§. 84.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden, so daß die Summe des Doppelten der einen, und des Dreyfachen der andern 18, ihr Product aber 12 sey.

Durch Räsonnement. Da das Product der gesuchten Zahlen 12 ist; so ist das Product des Doppelten der einen durch das Dreyfache der andern, sechsmal 12, oder 72.

Betrachtet man also das Doppelte der einen, und das Dreyfache der andern zu findenden Zahl als die gesuchte Größen, so reducirt sich die Aufgabe auf die des § 79: zwey Zahlen finden, deren Summe 18, und deren Product 72 ist. Das Quadrat der halben Differenz des Doppelten der einen und des Dreyfachen der andern ist also gleich dem Ueberschuß des Quadrats der Hälfte von 18, das heißt, von 81, über 72; mithin gleich 9. Folglich ist das Doppelte der ersten Zahl

$$9 \pm 3 = \begin{cases} 12 \\ 6 \end{cases}$$

das Dreyfache der andern . . . . . . $9 \mp 3 = \begin{cases} 6 \\ 12 \end{cases}$

Also die erste Zahl $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$; die andere $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Nämlich, ist die erste Zahl 6; so ist die andere 2: und ist die erste Zahl 3; so ist die andere 4.

Algebraisch. Gesuchte Zahlen x, y.

Bed. $\begin{bmatrix} 2x + 3y = 18 \\ xy = 12. \end{bmatrix}$

Red. Man quadrire auf beyden Seiten der ersten Gleichung . . $4xx + 12xy + 9yy = 324$

Man multiplicire beyde Seiten der andern Gleichung durch 24 . . . $24xy = 288$

Von der ersten Gleichung ziehe man die andere ab . . . . . $4xx - 12xy + 9yy = 36$

Auf jeder Seite ziehe man die Quadratwurzel aus $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 3y - 2x = 6 \end{cases}$

oder $2x - 3y = \pm 6.$

Es ist aber $2x + 3y = 18$

folglich $4x = \begin{bmatrix} 24 \\ 12 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

$6y = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix}$ $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Allgemein. Es sey $ax+by=s$

$xy \quad =p.$

Red. Man quadrire auf beyden Seiten der ersten Gleichung, und multiplicire mit 4ab auf beyden Seiten der andern; so erhält man $aaxx+2abxy+bbyy=ss$

$4abxy \quad =4abp$

Abgezogen . . . . $aaxx-2abxy+bbyy=ss-4abp$

Die Quadratwurzel ausgezogen $ax-by=\pm\sqrt{(ss-4abp)}$

Es ist aber . . . . $ax+by=s$

folglich . . . . . $2ax \quad =s\pm\sqrt{(ss-4abp)}$

$2by=s\mp\sqrt{(ss-4abp)}$

Hieraus $x=\frac{s\pm\sqrt{(ss-4abp)}}{2a}$

$y=\frac{s\mp\sqrt{(ss-4abp)}}{2b}$

$$ax+by=\frac{s\pm\sqrt{(ss-4abp)}}{2}+\frac{s\mp\sqrt{(ss-4abp)}}{2}=\frac{2s}{2}=s$$

$$xy=\frac{ss-(ss-4abp)}{4ab}=\frac{4abp}{4ab}=p.$$

Gränze. Damit die Aufgabe möglich sey: muß $ss \overline{\geq} 4abp$ seyn: folglich ist $\frac{ss}{4ab}$ der größte Werth von p.

Anmerkung. Obgleich die Werthe von ax und by mit einander wechseln; so sind doch die Werthe von x und die von y unter einander verschieden: und die Aufgabe, welche in Beziehung auf die Producte der gesuchten Zahlen durch die gegebene a, b, als nur einer Auflösung fähig angesehn werden konnte, hat zwey verschiedene Auflösungen in Beziehung auf die gesuchte Zahlen selbst.

Diese Aufgabe giebt das erste Beyspiel einer Frage, wo der Größe und dem Zeichen nach verschiedene Werthe der unbekannten Größen aus den zwey Auflösungen folgen; und zeigt: daß, obgleich die zwey Auflösungen unter einem

gewißen Gesichtspunct betrachtet als eine angesehen werden können, doch auf ihre Verschiedenheit in den Anwendungen und daraus sich ergebenden Folgen Rüksicht genommen werden müsse.

Die bisher entwikelten Beyspiele zeigen hinlänglich: daß man, durch schikliche und symmetrische Benennung der unbekannten Größen manche Aufgaben auf eine reine Gleichung vom zweyten Grade bringen kann, welche dieser einfachen Behandlung nicht unmittelbar fähig scheinen. Da man aber zu dieser Vereinfachung der Gleichung öfters nur durch Umwege gelangt, die mehr Zeit und Mühe kosten, als dazu anzuwenden schiklich ist; so hat man sich auch die allgemeine Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade vollkommen bekannt und geläufig zu machen.

Dieses zu erleichtern, werde ich erstlich einige von den Aufgaben wieder vornehmen, welche dem bisherigen Zwek gemäß behandelt, und durch schikliche Wahl symmetrischer Ausdrüke der gesuchten Größen auf reine quadratische Gleichungen gebracht worden sind.

Zweyter Abschnitt.

Vollständige (unreine) Gleichungen vom zweyten Grade.

§. 85.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden, deren Differenz 2d, und das Product p ist.

Ben. Gesuchte Zahlen . . . . . . $\begin{cases} x \\ x+2d \end{cases}$

Product . . . . $xx+2dx$.

Bed. $xx+2dx=p$.

Ich nenne diese Gleichung vollständig, weil sie Glieder von dreyerley Art enthält: eines, worin das Quadrat der unbekannten Größe xx vorkommt; ein zweytes, welches das Product der unbekannten Größe durch eine bekannte ist (hier 2dx); und ein drittes nur aus bekannten Grössen bestehendes (hier p).

Hiebey muß man sich des §. 58. bewiesenen Sazes erinnern: daß das Quadrat einer aus zwey Theilen bestehenden Größe (eines Binomium) aus dem Quadrat des einen Theils, aus dem doppelten Product dieses Theils in den andern, und aus dem Quadrat des andern Theils zusammengenommen bestehe. Betrachtet man diesemnach x als den einen Theil des Binomium, dessen Quadrat man in die Gleichung bringen will: so wird 2dx das doppelte Product dieses Theils in den andern; also 2d das Doppelte des andern Theils, und d der einfache andere Theil seyn. Addirt man nun beyderseits das Quadrat von d, so erhält man:

$$xx + 2dx + dd = p + dd$$
$$(x+d)^2 = p + dd.$$

So wird die Aufgabe, welche auf eine vollständige Gleichung vom zweyten Grade geführt hatte, auf eine reine quadratische Gleichung reducirt, woraus man erhält

$$x+d = \pm\sqrt{(p+dd)}; \qquad x = \pm\sqrt{(p+dd)} - d$$
$$x+2d = \pm\sqrt{(p+dd)} + d.$$

Anmerkung. Die aus der reinen Gleichung $(x+d)^2 = p+dd$ gefolgerte Größe $x+d$ ist die halbe Summe der zwey gesuchten Zahlen; woraus die Uebereinstimmung dieses neuen Verfahrens mit dem obigen § 78. erhellet.

§ 86.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden, deren Differenz 2d, und die Summe der Quadrate 2q ist.

Bez. Gesuchte Zahlen $\begin{cases} x \\ x+2d \end{cases}$ Quadrate $\begin{cases} xx \\ xx+4dx+4dd \end{cases}$

Summe $2xx+4dx+4dd$

Bed. $2xx+4dx+4dd=2q.$

Red. $xx+2dx+2dd= q.$

Betrachtet man x als das eine Glied des Binomium, wovon man das Quadrat haben will: so ist 2d das Doppelte des zweyten Glieds, und d das zweyte Glied; dessen Quadrat dd ist. Um also auf der einen Seite das Quadrat von $x+d$ zu haben, muß beyderseits dd abgezogen werden: so erhält man die reine quadratische Gleichung $(x+d)^2=q-dd$, deren unbekannte Größe $x+d$ die halbe Summe der gesuchten Zahlen ist. Folglich ist $x+d =\pm\sqrt{(q-dd)}$.

Aufl. $x=-d\pm\sqrt{(q-dd)};$

$x+2d= d\pm\sqrt{(q-dd)};$

$xx= dd\mp 2d\sqrt{(q-dd)}+q-dd=q\mp 2d\sqrt{(q-dd)}$

$(x+2d)^2= dd\pm 2d\sqrt{(q-dd)}+q-dd=q\pm 2d\sqrt{(q-dd)}$

$2xx+4dx+4dd =2q.$

§. 87.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden, deren Summe 2s, und das Product p ist.

Bez. Gesuchte Zahlen $\begin{cases} x \\ 2s-x \end{cases}$

Product $2sx-xx.$

Bed. $2sx-xx=p.$

Red. Da ein Quadrat immer positiv ist, was auch seine Wurzel vor ein Zeichen haben mag; so besteht die erste vorzunehmende Veränderung darinn, beyderseits xx zu addiren: und nun muß man, um die mit der unbekannten

Größe verbundenen Glieder auf einer Seite zu haben, beyderseits 2sx abziehen. So erhält man

$$xx - 2sx + p = 0.$$

Man betrachte x als den einen Theil des Binomium, wovon man das Quadrat haben will, folglich 2s als das Doppelte des zweyten Theils. Da das Glied 2sx das Zeichen der Subtraction vor sich hat; so ist x—s oder s—x das Binomium, wovon man auf der einen Seite der Gleichung das Quadrat haben will. Wird daher beyderseits ss addirt, und p abgezogen; so erhält man:

$xx - 2sx + ss = ss - p$. Folglich $\left.\begin{matrix} x-s \\ s-x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(ss-p)}$; oder $x = s \pm \sqrt{(ss-p)}$.

Aufl. $x = s \pm \sqrt{(ss-p)}$

$2s - x = s \mp \sqrt{(ss-p)}$

$2sx - xx = ss - (ss-p) = p.$

Das erste Glied der reinen Gleichung $(x-s)^2 = ss - p$ ist das Quadrat der halben Differenz der zwey gesuchten Zahlen; übereinstimmend mit §. 80.

§. 88.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden, deren Summe 2s, und die Summe der Quadrate 2q ist.

Ben. Gesuchte Zahlen $\left\{\begin{matrix} x \\ 2s-x \end{matrix}\right.$ Quadrate $\left\{\begin{matrix} xx \\ 4ss-4sx+xx \end{matrix}\right.$

Summe $4ss - 4sx + 2xx.$

Bed. $4ss - 4sx + 2xx = 2q.$

Red. $2ss - 2sx + xx = q$

$xx - 2sx + ss = q - ss$

$x - s = \pm\sqrt{(q-ss)}$

$\left.\begin{matrix} x = s \pm \sqrt{(q-ss)} \\ 2s - x = s \mp \sqrt{(q-ss)} \end{matrix}\right\}$ wie in §. 81.

§. 89.

Allgemeinere Aufgabe. Zwey Zahlen finden, deren Summe s der Producte durch die gegebene Zahlen a und b; und die Summe q der Producte ihrer Quadrate durch die gegebene Zahlen m und n gegeben sind.

Bed. $\begin{cases} ax + by = s \\ mxx + nyy = q. \end{cases}$

Red. $\begin{cases} ax = s - by; \\ mxx = q - nyy; \end{cases}$ $x = \frac{s-by}{a}$; $xx = \frac{(s-by)^2}{aa}$

$$\frac{m(s-by)^2}{aa} = q - nyy$$

$$(m\frac{bb}{aa} + n)yy - \frac{2mbs}{aa}y + m\frac{ss}{aa} = q$$

$$yy - \frac{2mbs}{naa+mbb}y + m\frac{ss}{naa+mbb} = q \times \frac{aa}{naa+mbb}.$$

$$yy - \frac{2mbs}{naa+mbb}y + \frac{mmbbss}{(naa+mbb)^2} =$$

$$\frac{mmbbss}{(naa+mbb)^2} - m \times \frac{ss}{naa+mbb} + q \times \frac{aa}{naa+mbb}$$

$$= \frac{-mnaass}{(naa+mbb)^2} + q \times \frac{aa}{naa+mbb}$$

$$= aa \times \frac{q(naa+mbb) - mnss}{(naa+mbb)^2}$$

$$y - \frac{mbs}{naa+mbb} = \pm a \times \frac{\sqrt{(q(naa+mbb) - mnss)}}{naa+mbb}$$

$$y = \frac{mbs \pm a\sqrt{(q(naa+mbb) - mnss)}}{naa+mbb}$$

$$by = \frac{mbbs \pm ab\sqrt{(q(naa+mbb) - mnss)}}{naa+mbb}$$

$$ax = s - \frac{mbbs \pm ab\sqrt{(q(naa+mbb) - mnss)}}{naa+mbb}$$

$$= \frac{naas \mp ab\sqrt{(q(naa+mbb) - mnss)}}{naa+mbb}$$

$$x = \frac{nas \mp b\sqrt{(q(naa+mbb) - mnss)}}{naa+mbb}$$

Aufl.

Aufl. $x = \frac{nas \mp b\sqrt{(q(naa + mbb) - mnss)}}{naa + mbb}$

$y = \frac{mbs \pm a\sqrt{(q(naa + mbb) - mnss)}}{naa + mbb}$

$xx =$

$$\frac{nnaass - mnbbss + bbq(naa + mbb) \mp 2nabs\sqrt{(q(naa + mbb) - mnss)}}{(naa + mbb)^2}$$

$yy =$

$$\frac{mmbbss - mnaass + aaq(naa + mbb) \pm 2mabs\sqrt{(q(naa + mbb) - mnss)}}{(naa + mbb)^2}$$

$mxx =$

$$\frac{mnss(naa - mbb) + mbbq(naa + mbb) \mp 2mnabs\sqrt{(q(naa + mbb) - mnss)}}{(naa + mbb)^2}$$

$nyy =$

$$\frac{mnss(mbb - naa) + naaq(naa + mbb) \pm 2mnabs\sqrt{(q(naa + mbb) - mnss)}}{(naa + mbb)^2}$$

$$mxx + nyy = \frac{q(mbb + naa)(naa + mbb)}{(naa + mbb)^2} = q.$$

1. Anmerkung. Soll die Aufgabe möglich seyn; so muß $q(naa + mbb) \geqq mnss$ seyn: $\frac{mnss}{naa + mbb}$ ist daher der kleinste Werth von q.

Alsdenn ist $x = \frac{nas}{naa + mbb}$

$y = \frac{mbs}{naa + mbb}$; $x : y = na : mb$.

Beyspiel. Für $\begin{matrix} a = b = 1 \\ m = n = 1 \end{matrix}$ werden $\begin{matrix} x = \frac{s \mp \sqrt{(2q - ss)}}{2} \\ y = \frac{s \pm \sqrt{(2q - ss)}}{2} \end{matrix}$

Der kleinste Werth von q ist $\frac{1}{2}ss$; und alsdenn sind $x = y = \frac{1}{2}s$.

2. Anmerkung. Verändert man das Zeichen von b; so lööt man die Aufgabe auf, für welche $\begin{cases} ax - by = s \\ mxx + nyy = q \end{cases}$ sind.

Man erhält $x = \frac{nas \pm b\sqrt{(q(naa + mbb) - mnss)}}{naa + mbb}$

$$y = \frac{-mbs \pm a\sqrt{(q(naa + mbb) - mnss)}}{naa + mbb}$$

§. 90.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden, deren Summe s der Producte durch die gegebene Zahlen a und b, und die Differenz q der Producte ihrer Quadrate durch die gegebene Zahlen m und n, gegeben sind.

Bed. $\begin{cases} ax + by = s \\ mxx - nyy = q. \end{cases}$

Red. $y = \frac{s - ax}{b}$; $mxx - n \times \frac{(s-ax)^2}{bb} = q$

$$xx\left(m - n\frac{aa}{bb}\right) + \frac{2nas}{bb}x - n\frac{ss}{bb} = q$$

$$xx \times \frac{mbb - naa}{bb} + \frac{2nas}{bb}x - n\frac{ss}{bb} = q$$

Erster Fall. Es sey $mbb = naa$: so verschwindet das mit dem Quadrat der unbekannten Größe behaftete Glied; und die Gleichung verwandelt sich in eine vom ersten Grade

$\frac{2nas}{bb}x - n \times \frac{ss}{bb} = q$; woraus folgt $x = \frac{nss + bbq}{2nas}$

$$y = \frac{nss - bbq}{2nbs}$$

Zweyter Fall. Es sey $mbb > naa$.

$$xx \times \frac{mbb - naa}{bb} + \frac{2nas}{bb}x - n \times \frac{ss}{bb} = q$$

$$xx + \frac{2nas}{mbb-naa}x - n \times \frac{ss}{mbb-naa} = q \times \frac{bb}{mbb-naa}$$

$$xx + \frac{2nas}{mbb-naa}x + \frac{nnaass}{(mbb-naa)^2} = \frac{mnbbss + bbq(mbb-naa)}{(mbb-naa)^2}$$

$$x + \frac{nas}{mbb-naa} = \frac{\pm b\sqrt{(mnss + q(mbb-naa))}}{mbb-naa}$$

$$x = \frac{-nas \pm b\sqrt{(mnss + q(mbb-naa))}}{mbb-naa}$$

$$y = \frac{mbs \mp a\sqrt{(mnss + q(mbb-naa))}}{mbb-naa}$$

$$xx = \frac{nnaass + mnbbss + bbq(mbb-naa) \mp 2nabs\sqrt{(mnss + q(mbb-naa))}}{(mbb-naa)^2}$$

$$yy = \frac{mmbbss + mnaass + aaq(mbb-naa) \mp 2mabs\sqrt{(mnss + q(mbb-naa))}}{(mbb-naa)^2}$$

$$mxx = \frac{mnss(naa + mbb) + mbbq(mbb-naa) \mp 2mnabs\sqrt{(mnss + q(mbb-naa))}}{(mbb-naa)^2}$$

$$nyy = \frac{mnss(mbb + naa) + naaq(mbb-naa) \mp 2mnabs\sqrt{(mnss + q(mbb-naa))}}{(mbb-naa)^2}$$

$$mxx - nyy = \frac{q(mbb-naa)(mbb-naa)}{(mbb-naa)^2} = q.$$

1. Anmerkung. Unter dieser Voraussezung ist die Aufgabe immer möglich; weil (m, n, q als positiv angenommen) die Größe $mnss + q(mbb - naa)$ positiv ist.

2. Anmerkung. Der zweyte Werth von x, $\frac{-nas - b\sqrt{(mnss + q(mbb-naa))}}{mbb-naa}$ ist subtractiv, und entspricht der Gleichung $by - ax = s$.

3. Anmerkung. Der erste Werth von x ist positiv: denn $0 < (nss + bbq)(mbb - naa)$

$$< bb(mnss + q(mbb - naa)) - nnaass.$$

Folglich $nnaass < bb(mnss + q(mbb - naa))$
und $nas < b\sqrt{(mnss + q(mbb - naa))}$

4. Anmerkung. Der erste Werth von y ist $\left\{\begin{array}{l}\text{positiv}\\ \text{Null}\\ \text{negativ}\end{array}\right.$,
je nachdem $mss \gtreqless aaq$.

Denn wenn $mss \gtreqless aaq$:
so ist $mss(mbb - naa) \gtreqless aaq(mbb - naa)$;
und $mmbbss \gtreqless mnaass + aaq(mbb - naa)$
$mbs \gtreqless a\sqrt{(mnss + q(mbb - naa))}$.

5. Anmerkung. Wird das Zeichen von b verändert: so löst man die Aufgabe $\left\{\begin{array}{l} ax - by = s \\ mxx - nyy = q \end{array}\right.$ auf; und erhält

$$x = \frac{-nas \mp b\sqrt{(mnss + q(mbb - naa))}}{mbb - naa}$$

$$y = \frac{-mbs \mp a\sqrt{(mnss + q(mbb - naa))}}{mbb - naa}$$

Ueber diese Formeln lassen sich in Rüksicht auf ihre Zeichen den vorhergehenden ähnliche Bemerkungen machen.

Dritter Fall. Es sey $mbb < naa$: so wird die Grundgleichung $xx\frac{naa-mbb}{bb} - \frac{2nas}{bb}x + n\frac{ss}{bb} + q = 0$.

Hieraus erhält man $x = \frac{nas \mp b\sqrt{(mnss - q(naa - mbb))}}{naa - mbb}$

$$y = \frac{-mbs \pm a\sqrt{(mnss - q(naa - mbb))}}{naa - mbb}.$$

1. Anmerkung. Die Formeln dieses 3ten Falls hätten auch aus den des zweyten durch Verwechslung der Zeichen des Nenners und Zählers der Brüche, woraus sie bestehen, hergeleitet werden können.

2. **Anmerkung.** Die Aufgabe leidet in diesem Fall eine Einschränkung. Soll sie nämlich möglich seyn; so muß $mnss \gtreqless q(naa - mbb)$ seyn: der größte Werth von q ist daher $\frac{mnss}{naa - mbb}$.

3. **Anmerkung.** Beyde Werthe von x sind positiv: aber der zweyte Werth von y ist immer negativ, und entspricht der Aufgabe $\begin{cases} ax - by = s \\ mxx - nyy = q. \end{cases}$

Der erste Werth von y ist $\begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{Null} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$, je nachdem

$aaq \lesseqgtr mss$.

Die zwey Aufgaben, deren eine den Bedingungen $\begin{cases} ax + by = s \\ mxx - nyy = q \end{cases}$, die andere den Bedingungen $\begin{cases} ax - by = s \\ mxx - nyy = q \end{cases}$ entspricht, sind folglich so mit einander verknüpft, daß sie zugleich aufgelöst werden.

Allgemeine Anmerkung. Unerachtet der erste Fall, wo $mbb = naa$, von den zwey andern, in welchen diese Gleichheit nicht statt hat, wesentlich verschieden ist: so sucht man doch die Auflösung desselben aus der Auflösung eines von jenen zwey Fällen, z. B. aus der des ersten, wo $mbb > naa$, heraus zu leiten, welche war

$$x = \frac{-nas \pm b\surd(mnss + q(mbb - naa))}{mbb - naa}$$

$$y = \frac{mbs \mp a\surd(mnss + q(mbb - naa))}{mbb - naa}.$$

Sezt man nun in diesen Formeln $mbb = naa$: so werden die Nenner Null; für die zweyten Werthe der unbekannten Größen x, y aber werden die Zähler nicht zu gleicher Zeit Null. Diese zweyten Werthe sind also unmöglich: sie sind nämlich mit hereingekommen, weil man irriger Weise fortgefahren hat das Zeichen $xx(mbb - naa)$

als eine Größe zu behandlen, das doch unter der Voraussezung $mbb - naa$ keine Größe ist.

Unter eben dieser Voraussezung $mbb = naa$ wird des ersten Werths von x sein Zähler $- nas + bs\sqrt{mn} = - nas + bs\sqrt{m \times \frac{mbb}{aa}} = = - nas + \frac{mbbs}{a} = \frac{-naa + mbb}{a} s$, und verschwindet zugleich mit dem Nenner: so scheint mithin dieser Werth von x unbestimmt zu seyn. Er ist aber dennoch bestimmt, nämlich $= \frac{nss + bbq}{2nas}$ (Siehe den 1ten Fall).

Um diesen Werth aus der Formel

$$x = \frac{-nas + b\sqrt{(mnss + q(mbb - naa))}}{mbb - naa}$$

herzuleiten, multiplicire man den Nenner und Zähler derselben durch die nämliche Größe $- nas - b\sqrt{(mnss + q(mbb - naa))}$: so bekommt man

$$x = \frac{nnaass - bb(mnss + q(mbb - naa))}{(mbb-naa)(-nas-b\sqrt{(mnss+q(mbb-naa))})}$$

$$= \frac{nss(-mbb + naa) - bbq(mbb - naa)}{(-mbb+naa)(nas+b\sqrt{(mnss+q(mbb-naa))})}$$

$$= \frac{nss + bbq}{nas + b\sqrt{(mnss + q(mbb - naa))}}.$$

Woraus für den Fall $mbb = naa$ wird

$$\frac{nss + bbq}{nas + \sqrt{(nnaass)}} = \frac{nss + bbq}{2nas};$$

wie man oben (1ter Fall) unter dieser besonderen Voraussezung gefunden hat.

Anwendung. Zwey gegebene Zahlen a, b, jede in zwey Theile so theilen, daß die Summe der Quadrate des einen Theils von a und des einen Theils von b der Größe nach gegeben sey; und so auch die Summe der Quadrate der zwey andern Theile.

§ 91.

Aufgabe. Zwey gegebene Zahlen in zwey Theile so theilen, daß der eine Theil des einen zu dem einen Theil

der andern ein gegebenes Verhältniß habe; und daß das Product der zwey andern Theile einer gegebenen Zahl gleich sey.

Erster Fall. Das Verhältniß der zwey gegebenen zu theilenden Zahlen sey dem vorgegebenen Verhältniß der ersten zwey Theile derselben gleich.

So sind auch die andern zwey Theile desselben in eben diesem gegebenen Verhältniß: und die Aufgabe reducirt sich auf diese: zwey Zahlen finden, deren Verhältniß und Product gegeben sind.

Beyspiel. Die zwey Zahlen 12 und 24 jede in zwey Theile so theilen, daß der eine Theil von 24 das Doppelte des einen Theils von 12; und das Product der zwey andern Theile 98 sey.

Weil 24 das Doppelte von 12; und der erste Theil von 24 das Doppelte des ersten Theils von 12 ist: so wird auch der zweyte Theil von 24 das Doppelte des zweyten Theils von 12; und das Product dieser zweyten Theile das Doppelte des Quadrats des zweyten Theils von 12 seyn. Dieses Product aber ist 98. Folglich ist 98 das doppelte Quadrat des zweyten Theils von 12; und das Quadrat dieses zweyten Theils ist 49: dieser zweyte Theil selbst ist also 7.

Zweyter Theil von 12 . .	7	Zweyter Theil von 24 . .	14
erster	5	erster	10.

Algebraisch.

Ben.

Erster Theil von 12 . .	x	Zweyter Theil von 12 . .	$12-x$
. . . . . . 24 . .	$2x$	. . . . . . 24 . .	$24-2x$
		Product . . .	$2(12-x)^2$

Bed. $2(12-x)^2=98.$

Red. $(12-x)^2=49.$

Folglich $\begin{matrix}12-x\\x-12\end{matrix}=7;\ x=\frac{12-7}{12+7}=\frac{5}{19}.$

Aufl. $x=\frac{5}{19};\ 2x=\frac{10}{38};\ 12-x=\frac{7}{-7};\ 24-2x=\frac{14}{-14}.$

Anmerkung. Die Auflösung $\begin{matrix}12-x=-7\\24-2x=-14\end{matrix}$ entspricht der Aufgabe, worinn die Zahlen 12 und 24 der Ueberschuß der ersten Zahlen $\frac{19}{38}$ über die zweyte $\frac{7}{14}$ sind: und geht man auf die Bedingung zurük, so ist das Product der zwey Factoren $12-x$ und $24-2x$ einerley mit dem Product der zwey Factoren $x-12$ und $2x-24$; oder $(x-12)^2$ und $(12-x)^2$ sind einerley Größen.

Allgemein. Die zwey gegebene Zahlen a, b, jede in zwey Theile so theilen, daß der eine Theil der ersten sich zu dem einen Theil der andern verhalte wie a zu b; und daß das Product ihrer andern zwey Theile p sey.

Ben. Erster Theil der ersten Zahl x

. . . . . . zweyten . . . . . . $\frac{b}{a}x$

Zweyter Theil der ersten Zahl . . . . . $a-x$

. . . . . . zweyten . . . . . $b-\frac{b}{a}x$

Product . . . . $(a-x)(b-\frac{b}{a}x)$

$=\frac{b}{a}(a-x)^2.$

Bed. $\frac{b}{a}(a-x)^2=p.$

Red. $(a-x)^2=\frac{a}{b}p;\ \begin{matrix}a-x\\x-a\end{matrix}=\sqrt{\frac{a}{b}p}.$

Aufl. $x = a \mp \sqrt{\frac{a}{b}p}$ $a - x = \pm\sqrt{\frac{a}{b}p}$

$\frac{b}{a}x = b \mp \sqrt{\frac{b}{a}p}$ $b - \frac{b}{a}x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}p}$

$$(a-x)(b-\frac{b}{a}x) = +p.$$

Anmerkung. Da die zweyte Auflösung für die zweyten Theile von a und b negative Grössen gibt; so entspricht sie der Aufgabe, worinn die Grössen a und b beziehungsweise der Ueberschuß der ersten Theile über die zweyte sind.

Die ersten Theile in der ersten Auflösung sind positiv, null, oder negativ; je nachdem ab grösser, gleich, oder kleiner als p ist. In dem lezten Fall entspricht die erste Auflösung der Aufgabe, in welcher die Grössen a und b beziehungsweise der Ueberschuß der zweyten Theile über die ersten sind.

Zweyter Fall. Das gegebene Verhältniß der zwey ersten Theile ist dem Verhältniß der zwey gegebenen Grössen a und b nicht gleich.

Da nun das gegebene Verhältniß der zwey ersten Theile grösser oder kleiner ist als das von a zu b: so ist es in dem ersten Fall dem Verhältniß einer gegebenen Grösse a', die grösser als a ist, zu b; und in dem zweyten Fall dem Verhältniß von a zu einer gegebenen Grösse b', welche grösser als b ist, gleich. Es sey also das Verhältniß der zwey ersten Theile dem von $a' > a$ zu b gleich: und man stelle sich auch a' in zwey Theile zerlegt vor, deren erster einerley sey mit dem ersten Theil von a. So verhält sich auch der zweyte Theil von a' zu dem zweyten Theil von b wie a' zu b; und das Product des zweyten Theils von a' durch den zweyten Theil von a verhält sich zu dem gegebenen Product p des zweyten Theils von b durch den zweyten Theil von a, noch wie a' zu b. Folglich ist das Product des zweyten Theils von a' durch den zweyten Theil von a gleich dem ge-

gegebenen Product $p \times \frac{a'}{b}$. Es ist aber auch der Unterschied der zweyten Theile von a' und a gegeben, nämlich $a' - a$. Die vorgelegte Aufgabe reducirt sich also auf die des § 78: zwey Zahlen finden, deren Unterschied und Product gegeben sind. Man findet demnach

Quadrat der halben Summe der zweyten Theile von a' und a . . . $\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2 + p \times \frac{a'}{b}$

Halbe Summe der zweyten Theile von a' und a . . . $\pm \sqrt{\left(\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2 + p \times \frac{a'}{b}\right)}$

Zweyter Theil von a . . . $\pm \sqrt{\left(\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2 + p \times \frac{a'}{p}\right)} - \left(\frac{a'-a}{2}\right)$

Erster Theil von a . . . $\frac{a'+a}{2} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2 + p\frac{a'}{b}\right)}$

Erster Theil von b . . . $\frac{a'+a}{2} \times \frac{b}{a'} \mp \frac{b}{a'}\sqrt{\left(\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2 + p\frac{a'}{b}\right)}$

$$= \frac{a'+a}{2} \times \frac{b}{a'} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2 \times \frac{bb}{a'a'} + p\frac{b}{a'}\right)}$$

Zweyter Theil v. b . . . $\frac{a'-a}{2} \times \frac{b}{a'} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2 \times \frac{bb}{a'a'} + p\frac{b}{a'}\right)}$

$$= \frac{a'-a}{2} \times \frac{b}{a'} \pm \frac{b}{a'}\sqrt{\left(\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2 + p\frac{a'}{b}\right)}.$$

Product der zweyten Theile von a und b

$$\pm \frac{a'-a}{2} \times \frac{b}{a'}\sqrt{\left(\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2 + p \times \frac{a'}{b}\right)} - \frac{b}{a'} \times \left(\frac{a'-a}{2}\right)^2$$

$$\mp \frac{a'-a}{2} \times \frac{b}{a'}\sqrt{\left(\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2 + p \times \frac{a'}{b}\right)} + \frac{b}{a'}\left(\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2 + p\frac{a'}{b}\right)$$

$$= p.$$

Algebraisch.

Ben. Erster Theil von a x

. . . . . b . . . . $\frac{b}{a'}x$

Zweyter Theil von a . . . . . $a-x$

. . . . . . $b \ldots b-\frac{b}{a'}x=\frac{b}{a'}(a'-x)$

Product der zweyten Theile... $\frac{b}{a'}(a-x)(a'-x)$

Bed. $\frac{b}{a'}(a-x)(a'-x)=p.$

Red. $(a-x)(a'-x)=\frac{a'}{b}\times p$

$$aa'-x(a+a')+xx=\frac{a'}{b}\times p$$

$$xx-x(a+a')+\left(\frac{a+a'}{2}\right)^2=\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2+\frac{a'}{b}p$$

$$x-\frac{a+a'}{2}=\pm\sqrt{\left(\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2+\frac{a'}{b}p\right)}$$

Aufl. $x=\frac{a'+a}{2}\pm\sqrt{\left(\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2+\frac{a'}{b}p\right)}$

$$a-x=\frac{-a'+a}{2}\mp\sqrt{\left(\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2+\frac{a'}{b}p\right)}$$

$$\frac{b}{a'}x=\frac{a'+a}{2}\times\frac{b}{a'}\pm\frac{b}{a'}\sqrt{\left(\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2+\frac{a'}{b}p\right)}$$

$$b-\frac{b}{a'}x=\frac{a'-a}{2}\times\frac{b}{a'}\mp\frac{b}{a'}\sqrt{\left(\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2+\frac{a'}{b}p\right)}$$

1. **Anmerkung.** Die ersten Werthe der zwey ersten Theile von a und b sind positiv: aber die ersten Werthe der zweyten Theile von a und b sind negativ; und entsprechen der Aufgabe, worin a und b die Ueberschüße der ersten Größen über die zweyte angeben.

Die zweyten Werthe der zweyten Theile von a und b sind positiv. Die zweyten Werthe der ersten Theile von a und b aber sind positiv, null, oder negativ, je nachdem

$$\frac{a'+a}{2} \gtreqless \sqrt{\left(\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2+\frac{a'}{b}p\right)}$$

$$\left(\frac{a'+a}{2}\right)^2 \gtreqless \left(\frac{a'-a}{2}\right)^2+\frac{a'}{b}p$$

$$aa' \gtreqless \frac{a'}{b} p$$

$$ab \gtreqless \quad p \text{ ist:}$$

und in dem dritten Fall, wo $ab < p$, entspricht die zweyte Auflösung der Aufgabe, worinn die Zahlen a und b beziehungsweise der Ueberschuß der ersten Größen über die zweyte sind.

2. Anmerkung. Wenn die Größen a, a', b, p, positiv sind, so ist die vorgelegte Aufgabe immer möglich: und man löst, nach der verschiedenen Beschaffenheit der Werthe von a, a', b, p, die Aufgaben auf, in welchen die Größen a und b, entweder beyde die Summen, oder beyde die Unterschiede der gesuchten Größen sind.

Das Product $aa' - x(a + a') + xx$ entsteht nämlich eben sowohl aus den zwey Factoren $(a-x)(a'-x)$, als aus den zwey Factoren $(x-a)(x-a')$, deren Zeichen die entgegengesezte der ersten sind.

Verändert aber nur einer dieser Factoren sein Zeichen: so ändert sich das Zeichen des Products; und man löset die Aufgabe auf, worinn die eine der gegebenen Größen die Summe, die andere der Unterschied der ihr zugehörigen gesuchten Größen ist. Man erhält alsdenn $x = \frac{a'+a}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2 - \frac{a'}{b} p\right)}$; welcher Werth nur möglich ist, wenn $\left(\frac{a'-a}{2}\right)^2 \geqq \frac{a'}{b} p$, oder $p \leqq \frac{b}{a'} \times \left(\frac{a'-a}{2}\right)^2$.

Folgende Aufgaben lassen sich daher als unter einer Aussage begriffen, und durch analoge, nur durch gehörige Veränderung der Zeichen ihrer Glieder verschiedene Formeln aufgelöst, ansehen: Vier Zahlen unter folgenden Bedingungen finden; man kennt die Summe oder den Unterschied der zwey ersten, und die Summe oder den Unterschied der zwey lezten; das Verhältniß der einen von den ersten zu der einen von den lezten ist gegeben; und das Product der Multiplication der zwey andern ist gegeben.

Andere Beyspiele. Sechs Zahlen unter folgenden Bedingungen finden: Man kennt

die Summe oder den Unterschied der zwey ersten

. . . . zweyten

. . . . dritten.

Ferner sind

das Verhältniß einer der ersten zu einer der zweyten,

. . . . der andern zweyten . . . dritten,

und das Product der andern ersten durch die andere dritte gegeben.

Desgleichen: für eine größere Anzahl gegebener Summen oder Unterschiede von je zwey und zwey Zahlen.

§. 92.

Aufgabe. Jede der zwey gegebenen Zahlen a, b in zwey Theile so theilen, daß der eine Theil von a zu dem einen Theil von b ein gegebenes Verhältniß habe, und daß die Summe der Quadrate ihrer andern Theile einer gegebenen Zahl gleich sey.

Man könnte auch hier die Auflösung theilen: und den Fall besonders betrachten, wenn das gegebene Verhältniß dem von a zu b gleich, folglich auch das Verhältniß der andern zwey Theile gegeben ist; mithin die Aufgabe sich auf die in § 70. zurükführen läßt. Nach der ausführlichen Auseinandersezung der vorhergehenden Aufgabe halte ich aber für schiklich, diese auf eine allgemeine Art aufzulösen.

Das gegebene Verhältniß des einen Theils von a zu dem einen Teil von b sey das von m zu n; und die gegebene Summe der Quadrate der andern Theile sey q.

Ben. Erster Theil von a . . x

. . . . . b . . $\frac{n}{m}x$;

Zweyter Theil von a . . $a-x$

. . . . . b . . $b-\frac{n}{m}x$.

Quadrate dieser zweyten Theile $aa - 2ax + xx$

$$bb - 2\frac{n}{m}bx + \frac{nn}{mm}xx$$

Summe $aa + bb - 2\frac{ma+nb}{m}x + \frac{mm+nn}{mm}xx.$

Bed. $\frac{mm+nn}{mm}xx - 2\frac{ma+nb}{m}x + aa + bb = q$

$$xx - \frac{2m(ma+nb)}{mm+nn}x + \frac{mm}{mm+nn}(aa+bb) = \frac{mm}{mm+nn}q$$

$$xx - \frac{2m(ma+nb)}{mm+nn}x + \frac{mm(ma+nb)^2}{(mm+nn)^2} =$$

$$= \frac{mm}{mm+nn}q - \frac{mm}{mm+nn}(aa+bb) + \frac{mm(ma+nb)^2}{(mm+nn)^2}$$

$$= \frac{mm}{mm+nn}q - \frac{mm(na-mb)^2}{(mm+nn)^2}$$

$$x - \frac{m(ma+nb)}{mm+nn} = \pm\frac{m}{mm+nn}\sqrt{(q(mm+nn)-(na-mb)^2)}$$

Aufl. $x = \frac{m(ma+nb) \pm m\sqrt{(q(mm+nn)-(na-mb)^2)}}{mm+nn}$

$$\frac{n}{m}x = \frac{n(ma+nb) \pm n\sqrt{(q(mm+nn)-(na-mb)^2)}}{mm+nn}$$

$$a - x = \frac{n(na-mb) \mp m\sqrt{(q(mm+nn)-(na-mb)^2)}}{mm+nn}$$

$$b - \frac{n}{m}x = \frac{m(-na+mb) \mp n\sqrt{(q(mm+nn)-(na-mb)^2)}}{mm+nn}$$

$$(a-x)^2 = \frac{(nn-mm)(na-mb)^2 + qmm(mm+nn) \mp 2mn(na-mb)\sqrt{(q(mm+nn)-(na-mb)^2)}}{(mm+nn)^2}$$

$$\left(b - \frac{n}{m}x\right)^2 =$$

$$\frac{(mm-nn)(na-mb)^2 + qnn(mm+nn) \pm 2mn(na-mb)\sqrt{(q(mm+nn)-(na-mb)^2)}}{(mm+nn)^2}$$

$$(a-x)^2 + \left(b - \frac{n}{m}x\right)^2 = \frac{q(mm+nn)(mm+nn)}{(mm+nn)^2} = q.$$

Grenze. Damit die Aufgabe möglich ist, muß $q(mm+nn) \geqq (na-mb)^2$ seyn:

der kleinste Werth von q ist also $\frac{(na-mb)^2}{mm+nn}$.

1. Anmerkung. Wenn die Aufgabe möglich ist; so sind die ersten Werthe von x und von $\frac{n}{m}x$ immer positiv.

Der erste Werth von a—x ist $\left[\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{null,}\\\text{negativ}\end{matrix}\right]$, je nachdem

$$n(na-mb) \gtreqless m\sqrt{(q(mm+nn)-(na-mb)^2)}$$

oder $(mm+nn)(na-mb)^2 \gtreqless qmm(mm+nn)$,

also $q \lesseqgtr \frac{(na-mb)^2}{mm}$ ist.

Ebenso ist der erste Werth von $b-\frac{n}{m}x$ $\left[\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{null,}\\\text{negativ}\end{matrix}\right]$, je nachdem $q \lesseqgtr \frac{(na-mb)^2}{nn}$ ist.

Der zweyte Werth von x, und folglich auch von $\frac{n}{m}x$ ist $\left[\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{null,}\\\text{negativ}\end{matrix}\right]$, je nachdem $q \lesseqgtr aa+bb$ ist.

Der zweyte Werth von a—x ist immer positiv, wenn $na > mb$: und alsdenn ist der zweyte Werth von $b-\frac{n}{m}x$ $\left[\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{null,}\\\text{negativ}\end{matrix}\right]$, je nachdem

$$n\sqrt{(q(mm+nn)-(na-mb)^2)} \gtreqless m(na-mb);$$

also $q \gtreqless \frac{(na-mb)^2}{mn} \gtreqless \left(a-\frac{m}{n}b\right)^2$ ist.

Ebenso ist der zweyte Werth von $b-\frac{n}{m}x$ immer positiv, wenn $mb > na$ ist: und alsdenn ist der zweyte Werth von $a-x$ $\left[\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{null,}\\\text{negativ}\end{matrix}\right]$, je nachdem $q \gtreqless \frac{(mb-na)^2}{mm} \gtreqless \left(b-\frac{n}{m}a\right)^2$ ist.

Nach der verschiedenen Beschaffenheit der gegebenen Grössen a, b, $\frac{m}{n}$, q, sind also in den für x, $\frac{n}{m}x$, $a-x$, $b-\frac{n}{m}x$ gefundenen Formeln die Auflösungen der einander ähnlichen, auf die Summen oder auf die Unterschiede der gesuchten Grössen sich beziehenden Aufgaben begriffen.

Aehnliche Beyspiele. Vier Grössen finden, wovon man die Summe oder den Unterschied der zwey ersten, die Summe oder den Unterschied der zwey lezten, das Verhältniß einer der ersten zu einer der lezten, und den Unterschied der Quadrate der zwey übrigen kennt.

Desgleichen: für eine grössere Anzahl gegebener Summen oder Unterschiede.

§ 93.

Aufgabe. Die Seiten eines Rectangels verhalten sich wie m zu n. Wenn die erste um a, und die zweyte um b wächst; so wird die Fläche des Rectangels = s. Welches sind seine Seiten?

Ben. Erste Seite . . x; erste verlängerte Seite $x+a$

Zweyte . . . $\frac{n}{m}x$; zweyte . . . $\frac{n}{m}x+b$

Zweyte Fläche $\frac{n}{m}xx+\left(b+\frac{n}{m}a\right)x+ab$

Bed. $\frac{n}{m}xx+\left(b+\frac{n}{m}a\right)x+ab=s.$

Red. $xx+\left(a+\frac{m}{n}b\right)x+\frac{m}{n}ab=\frac{m}{n}s$

$$xx+\left(a+\frac{m}{n}b\right)x+\left(\frac{a+\frac{m}{n}b}{2}\right)^2=\frac{m}{n}s+\left(\frac{a-\frac{m}{n}b}{2}\right)^2$$

$$x+\frac{a+\frac{m}{n}b}{2}=\pm\surd\left(\frac{m}{n}s+\left(\frac{a-\frac{m}{n}b}{2}\right)^2\right)$$

Aufl.

$$\text{Aufl.}\quad x = \pm\sqrt{\left(\frac{m}{n}s + \left(\frac{a-\frac{m}{n}b}{2}\right)^2\right)} - \frac{a+\frac{m}{n}b}{2}$$

$$\frac{n}{m}x = \pm\sqrt{\left(\frac{n}{m}s + \left(\frac{\frac{n}{m}a-b}{2}\right)^2\right)} - \frac{\frac{n}{m}a+b}{2}$$

$$x+a = \pm\sqrt{\left(\frac{m}{n}s + \left(\frac{a-\frac{m}{n}b}{2}\right)^2\right)} + \frac{a-\frac{m}{n}b}{2}$$

$$\frac{n}{m}x+b = \pm\sqrt{\left(\frac{n}{m}s + \left(\frac{\frac{n}{m}a-b}{2}\right)^2\right)} - \frac{\frac{n}{m}a-b}{2}$$

$$= \frac{n}{m}\left(\pm\sqrt{\left(\frac{m}{n}s + \left(\frac{a-\frac{m}{n}b}{2}\right)^2\right)} - \frac{a-\frac{m}{n}b}{2}\right)$$

$$(x+a)\left(\frac{n}{m}x+b\right) = \frac{n}{m}\left(\frac{m}{n}s + \left(\frac{a-\frac{m}{n}b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-\frac{m}{n}b}{2}\right)^2\right)$$

$$= \frac{n}{m} \times \frac{m}{n}s = s.$$

1. Anmerkung. Die der ersten Auflösung entsprechenden Werthe der verlängerten Seiten $x+a$, $\frac{n}{m}x+b$ sind positiv.

Die gesuchte Seiten x, $\frac{n}{m}x$ sind positiv; wenn

$$\frac{m}{n}s + \left(\frac{a-\frac{m}{n}b}{2}\right)^2 \geqq \left(\frac{a+\frac{m}{n}b}{2}\right)^2$$

$$\frac{m}{n}s \geqq \frac{m}{n}ab$$

$$s \geqq ab \text{ ist.}$$

Ist hingegen $s < ab$: so sind die ersten Werthe von x und $\frac{n}{m}x$ negativ; und entsprechen der Aufgabe, worinn sie von a und b sollen abgezogen werden.

Die zweyten Werthe von x und $\frac{n}{m}x$ sind immer negativ; und so auch die zweyten Werthe von $x+a$ und $\frac{n}{m}x+b$.

2. Anmerkung. Die gefundene Formeln enthalten auch die Beantwortung derjenigen Aufgaben, in welchen die Seiten des ersten Rectangels abnehmen.

1. Beyspiel. Die erste Seite desselben nehme um die Größe a ab, und die zweyte wachse um die Größe b: so giebt die Veränderung des Zeichens von a,

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{m}{n}s + \left(\frac{a+\frac{m}{n}b}{2}\right)^2\right)} + \frac{a-\frac{m}{n}b}{2}.$$

2. Beyspiel. Beyde Seiten des ersten Rectangels nehmen ab; die erste um die Größe a, die zweyte um b;

so wird $x = \pm \sqrt{\left(\frac{m}{n}s + \left(\frac{a-\frac{m}{n}b}{2}\right)^2\right)} + \frac{a+\frac{m}{n}b}{2}.$

Andere Beyspiele. Man kauft eine gewisse Anzahl Ellen Zeug, wovon die Elle 3mal so viel kostet, als man Ellen kauft. Da man eine Elle mehr von einem andern Zeug kauft, wovon die Elle 2 Bazen mehr als die Elle des ersten kostet; so bezahlt man 234 Bazen. Wieviel Ellen kauft man von jedem Zeug? Und wieviel kostet die Elle eines jeden?

Man beschäftiget eine gewisse Anzahl Arbeiter, deren jedem man 3mal so viel Kreuzer bezahlt, als es Arbeiter sind. Wären es 2 Arbeiter weniger, und zahlte man jedem 2 Kreuzer mehr; so hätte man 330 Kreuzer zu bezahlen. Wieviel sind es Arbeiter? und was bezahlt man jedem?

Einige Personen machen zusammen eine Lustparthie; wofür jede 5mal soviel Bazen bezahlen soll, als es Perso-

nen sind. Weil 2 derselben frey gehalten werden sollen, so wird die Zeche einer jeden der übrigen um 1 Bazen heruntergesezt; und nun bezahlen sie zusammen 392 Bazen. Wieviel sind es Personen? und wieviel bezahlt jede?

§. 94.

Aufgabe. Jede der zwey gegebenen Zahlen a, b in zwey Theile so theilen, daß das Product des einen Theils der ersten durch den einen Theil der zweyten = p; und das Product ihrer andern zwey Theile = p' sey.

Ben. Erster Theil von a . . . x . .
. . . . . . b . . . $\frac{p}{x}$

Zweyter Theil von a . . . $a-x$
. . . . . . b . . . $\frac{p'}{a-x}$.

Bed. $\frac{p'}{a-x} = b - \frac{p}{x}$.

Red. $p'x = bx(a-x) - p(a-x)$
$= abx - bxx - ap + px$
$bxx + p'x - abx - px + ap = 0$.

Die Brüche zu vermeiden, multiplicire man mit 4b; so bekommt man

$$4bbxx - 4b(ab - p' + p)x + 4abp = 0$$
$$4bbxx - 4b(ab - p' + p)x + (ab - p' + p)^2$$
$$= (ab - p' + p)^2 - 4abp$$
$$= (ab - p - p')^2 - 4pp'$$
$$2bx - (ab - p' + p) = \pm\sqrt{((ab - p - p')^2 - 4pp'}$$

Aufl. $x = \frac{\frac{ab-p'+p}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{ab-p'-p}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{b}$

$$\frac{p}{x} = \frac{bp}{\frac{ab-p'+p}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{ab-p'-p}{2}\right)^2 - pp'\right)}}$$

$$= \frac{bp\left(\frac{ab-p'+p}{2} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{ab-p'-p}{2}\right)^2 - pp'\right)}\right)}{\left(\frac{ab-p'+p}{2}\right)^2 - \left(\frac{ab-p'-p}{2}\right)^2 + pp'}$$

$$= \frac{bp\left(\frac{ab-p'+p}{2} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{ab-p'-p}{2}\right)^2 - pp'\right)}\right)}{(ab-p')p + pp'}$$

$$= \frac{\frac{ab-p'+p}{2} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{ab-p'-p}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{a}$$

$$a - x = \frac{\frac{ab+p'-p}{2} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{ab-p'-p}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{b}$$

$$b - \frac{p}{x} = \frac{\frac{ab+p'-p}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{ab-p'-p}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{a}$$

$$\frac{p'}{a-x} = \frac{bp'}{\frac{ab+p'-p}{2} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{ab-p'-p}{2}\right)^2 - pp'\right)}}$$

$$= \frac{bp'\left(\frac{ab+p'-p}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{ab-p'-p}{2}\right)^2 - pp'\right)}\right)}{(ab-p)p' + pp'}$$

$$= \frac{\frac{ab+p'-p}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{ab-p'-p}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{a}$$

1. Anmerkung. Das nämliche Resultat ergiebt sich mittelst zwey unbekannter Größen folgendermassen:

Bew. Erster Theil von a . . . x
. . . . b . . . y
Product xy

Zweyter Theil von a . . . a — x
. . . . b . . . b — y
Product ab — bx — ay + xy.

Bed. $\begin{cases} xy = p \\ xy - bx - ay + ab = p' \end{cases}$

Red. $bx + ay - ab = p - p'$
$bx + ay = p - p' + ab.$

Die Aufgabe ist also auf die §. 84. aufgelöste zurük geführt: zwey Zahlen finden, deren Product, und die Summe ihrer Producte durch gegebene Zahlen gegeben sind. Hiernach wird

Aufl. $$x = \frac{\frac{p-p'+ab}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{ab-p-p'}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{b}$$

$$y = \frac{\frac{p-p'+ab}{2} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{ab-p-p'}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{a}$$

$$a - x = \frac{\frac{-p+p'+ab}{2} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{ab-p-p'}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{b}$$

$$b - x = \frac{\frac{-p+p'+ab}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{ab-p-p'}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{b}$$

Probe. $$xy = \frac{\left(\frac{p-p'+ab}{2}\right)^2 - \left(\frac{ab-p-p'}{2}\right)^2 + pp'}{ab}$$

$$= \frac{(ab-p')p + pp'}{ab} = \frac{abp}{ab} = p$$

$$(a-x)(b-y) = \frac{\left(\frac{-p+p'+ab}{2}\right)^2 - \left(\frac{ab-p-p'}{2}\right)^2 + pp'}{ab}$$

$$= \frac{(ab-p)p' + pp'}{ab} = \frac{abp'}{ab} = p'$$

2. Anmerkung. Damit die Aufgabe möglich ist, muß $\left(\frac{ab-p-p'}{2}\right)^2 \geqq pp'$ seyn.

Aber $\left(\frac{ab-p-p'}{2}\right)^2 = \left(\frac{p+p'-ab}{2}\right)^2$. Die Möglichkeit der Aufgabe erfordert also, daß

$$\text{sowohl } \left(\frac{ab-p-p'}{2}\right)^2 \geqq pp'; \quad \text{als } \left(\frac{p+p'-ab}{2}\right)^2 \geqq pp'$$

$$ab-p-p' \geqq 2\sqrt{pp'} \qquad p+p'-ab \geqq 2\sqrt{pp'}$$

$$p+p'+2\sqrt{pp'} \leqq ab \qquad p-2\sqrt{pp'}+p' \geqq ab$$

$$(\sqrt{p}+\sqrt{p'})^2 \leqq ab \quad \text{oder} \left.\begin{matrix}(\sqrt{p}-\sqrt{p'})^2 \\ (\sqrt{p'}-\sqrt{p})^2\end{matrix}\right\} \geqq ab$$

$$\sqrt{p}+\sqrt{p'} \leqq \sqrt{ab} \qquad \text{oder} \left.\begin{matrix}\sqrt{p}-\sqrt{p'} \\ \sqrt{p'}-\sqrt{p}\end{matrix}\right\} \geqq \sqrt{ab}$$

Da die zwey Bestimmungen $\left\{\begin{matrix}\sqrt{p}+\sqrt{p'} \leqq \sqrt{ab} \\ \sqrt{p}-\sqrt{p'} \geqq \sqrt{ab}\end{matrix}\right.$ einander zu widersprechen scheinen; so können sie sich nicht auf eine und dieselbe Aufgabe beziehen.

Wirklich entsprechen auch die Bedingungen $\left\{\begin{matrix}xy & = p \\ xy-bx-ay+ab & = p'\end{matrix}\right.$ zwey verschiedenen Aufgaben: in deren einer, wie in der obigen Aussage, die Größen a und b die Summen eines Factors des ersten, und eines Factors des zweyten Products sind; in der andern aber a und b die Unterschiede dieser Factoren bedeuten. Das erste Glied der zweyten Gleichung nämlich, welches als das Product der Factoren $a-x$, $b-y$ betrachtet worden ist, läßt sich auch als das Product der Factoren $x-a$, $y-b$ ansehen, welches ebenfalls $xy-bx-ay+ab$ ist: und für diese Factoren $x-a$, $y-b$ sind die Größen a, b die Ueberschüsse der Größen x, y über die $x-a$, $y-b$.

Veränderte man die Zeichen von x und y: so würde das erste Glied der zweyten Gleichung $xy+bx+ay+ab=$

$(x+a)(y+b)$; und die Größen a, b wären nun die Ueberschüsse der Factoren $x+a$, $y+b$ über die Factoren x, y.

Nun wird sich zeigen lassen, daß

1° die Bestimmung $\sqrt{p}+\sqrt{p'} \leqq \sqrt{ab}$ sich auf die Gleichungen $\begin{cases} xy = p \\ (a-x)(b-y) = p' \end{cases}$ beziehet.

Wenn nämlich $\begin{cases} xy = p \\ (a-x)(b-y) = p' \end{cases}$; so ist $\sqrt{ab} \geqq \sqrt{p}+\sqrt{p'}$.

$$
\begin{array}{lrl}
\text{Denn} & (\sqrt{bx}-\sqrt{ay})^2 & \geqq 0 \\
\text{folglich} & bx+ay & \geqq 2\sqrt{ab}\times\sqrt{xy} \\
 & ab+xy-(bx+ay) & \leqq ab-2\sqrt{ab}\times\sqrt{xy}+xy \\
 & ab-bx-ay+xy & \leqq (\sqrt{ab}-\sqrt{xy})^2 \\
 & (a-x)(b-y) & \leqq (\sqrt{ab}-\sqrt{xy})^2 \\
 & \sqrt{(a-x)(b-y)} & \leqq \sqrt{ab}-\sqrt{xy} \\
 & \sqrt{ab} & \geqq \sqrt{(a-x)(b-y)}+\sqrt{xy} \\
 & & \geqq \sqrt{p}+\sqrt{p'}.
\end{array}
$$

2°. Damit die den Bedingungen $\begin{cases} xy = p \\ (x-a)(y-b) = p' \end{cases}$ entsprechende Aufgabe möglich sey; muß $\sqrt{ab} \leqq \sqrt{p}-\sqrt{p'}$ seyn.

Es ist nämlich, wie vorhin,

$$ab-bx-ay+xy \leqq (\sqrt{ab}-\sqrt{xy})^2 \leqq (\sqrt{xy}-\sqrt{ab})^2$$

Aber unter der Voraussezung $\begin{cases} x > a \\ y > b \end{cases}$ ist

$$ab-bx-ay+xy = (x-a)(y-b)$$

$$
\begin{array}{lrl}
\text{folglich} & (x-a)(y-b) & \leqq (\sqrt{xy}-\sqrt{ab})^2 \\
 & \sqrt{(x-a)(y-b)} & \leqq \sqrt{xy}-\sqrt{ab} \\
 & \sqrt{ab} & \leqq \sqrt{xy}-\sqrt{(x-a)(y-b)} \\
 & & \leqq \sqrt{p}-\sqrt{p'}.
\end{array}
$$

3°. Soll die Aufgabe, deren Bedingungen $\begin{cases} xy = p \\ (x+a)(y+b) = p' \end{cases}$ sind, möglich seyn; so muß $\sqrt{ab} \leqq \sqrt{p'} - \sqrt{p}$ seyn.

Denn es ist $bx+ay \geqq 2\sqrt{ab} \times \sqrt{xy}$, wie in dem ersten Fall.

Daher $ab+bx+ay+xy \geqq ab+2\sqrt{ab}\times\sqrt{xy}+xy$

$$(a+x)(b+y) \geqq (\sqrt{ab}+\sqrt{xy})^2$$
$$\sqrt{(a+x)(b+y)} \geqq \sqrt{ab}+\sqrt{xy}$$
$$\sqrt{ab} \leqq \sqrt{(a+x)(b+y)}-\sqrt{xy} \leqq \sqrt{p'}-\sqrt{p}.$$

3. Anmerkung. Die Größe $\sqrt{\left(\left(\frac{ab-p-p'}{2}\right)^2 - pp'\right)}$ läßt sich auch unter folgenden Formen darstellen:

$$\sqrt{\left(\left(\frac{ab-p+p'}{2}\right)^2 - 4abp'\right)}$$
$$\sqrt{\left(\left(\frac{ab+p-p'}{2}\right)^2 - 4abp\right)}$$
$$\sqrt{\left(\frac{ab-p-p'}{2}+\sqrt{pp'}\right)\left(\frac{ab-p-p'}{2}-\sqrt{pp'}\right)}$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{ab}+\sqrt{p}+\sqrt{p'})(\sqrt{ab}+\sqrt{p}-\sqrt{p'})(\sqrt{ab}-\sqrt{p}+\sqrt{p'})(\sqrt{ab}-\sqrt{p}-\sqrt{p'})}$$

1°. Es sey $\sqrt{ab} > \sqrt{p}+\sqrt{p'}$; um soviel mehr $ab > p+p'$; und noch um soviel mehr $\begin{Bmatrix} ab+p-p' \\ ab+p'-p \end{Bmatrix} > 0$: so sind beyde Werthe jeder der vier Größen x, y, $a-x$, $b-y$ positiv; und die den Gleichungen $\begin{cases} xy = p \\ (a-x)(b-y) = p' \end{cases}$ entsprechende Aufgabe ist in dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage auf zweyerley Arten aufgelöst.

Beyspiel. Es seyen $a=25$; $p=112$
$b=20$; $p'=132$

So sind $ab = 500$; $ab + p - p' = 480$; $\frac{ab+p-p'}{2} = 240$

$pp' = 14784$ $ab - p + p' = 520$ $\frac{ab-p+p'}{2} = 260$

$ab - p - p' = 256$ $\frac{ab-p-p'}{2} = 128$

$\left(\frac{ab-p-p'}{2}\right)^2 = 16384$; $\left(\frac{ab-p-p'}{2}\right)^2 - pp' = 1600$;

$\sqrt{\left(\left(\frac{ab-p-p'}{2}\right)^2 - pp'\right)} = 40$

$x = \frac{240 \pm 40}{20} = \begin{matrix}14\\10\end{matrix}$; $a - x = \begin{matrix}11\\15\end{matrix}$

$y = \frac{240 \mp 40}{25} = \begin{matrix}8\\11{,}2\end{matrix}$; $b - y = \begin{matrix}12\\8{,}8.\end{matrix}$

2°. Es sey $\sqrt{ab} < \sqrt{p} - \sqrt{p'}$; $ab < p + p' - 2\sqrt{pp'}$: und es sey $p > p'$.

Da $\sqrt{p} > \sqrt{ab} + \sqrt{p'}$:

so ist $p > ab + 2\sqrt{ab} \times \sqrt{p'} + p'$; und um so viel mehr $p > ab + p'$.

Folglich sind beyde Werthe sowohl von $a - x$, als von $b - y$ negativ; und die zwey Auflösungen gehören zu der durch die Gleichungen $\begin{cases} xy = p \\ (x-a)(y-b) = p' \end{cases}$ bestimmten Aufgabe.

Beyspiel. Es seyen $\begin{matrix} a = 10 \\ b = 8 \end{matrix}$; $\begin{matrix} p = 132 \\ p' = 6. \end{matrix}$

So sind $ab = 80$; $ab + p - p' = 206$; $\frac{ab+p-p'}{2} = 103$

$pp' = 792$ $ab - p + p' = -46$; $\frac{ab-p+p'}{2} = -23$

$ab - p - p' = -58$; $\frac{ab-p-p'}{2} = -29$

$\left(\frac{p+p'-ab}{2}\right)^2 = 841$; $\left(\frac{p+p'-ab}{2}\right)^2 - pp' = 49$; $\sqrt{\left(\left(\frac{p+p'-ab}{2}\right)^2 - pp'\right)} = 7$

$x = \frac{103 \pm 7}{8} = \begin{matrix} 13,75 \\ 12 \end{matrix}$; $a - x = \begin{matrix} -3,75 \\ -2 \end{matrix}$; $x - a = \begin{matrix} 3,75 \\ 2 \end{matrix}$

$y = \frac{103 \mp 7}{10} = \begin{matrix} 9,6 \\ 11 \end{matrix}$; $b - y = \begin{matrix} -1,6 \\ -3 \end{matrix}$; $y - b = \begin{matrix} 1,6 \\ 3 \end{matrix}$

3°. Eben so wird gezeigt: daß, wenn $p' > p$, und $\sqrt{ab} < \sqrt{p'} - \sqrt{p}$ ist, beyde Werthe von x und y negativ; die Werthe von $a - x$ und $b - y$ aber beyde positiv sind; die gefundene Formeln also den Gleichungen $\left\{\begin{matrix} xy = p, \\ (x+a)(y+b) = p' \end{matrix}\right.$ entsprechen.

Beyspiel. Es seyen $\begin{matrix} a = 10 \\ b = 8 \end{matrix}$; $\begin{matrix} p = 6 \\ p' = 132 \end{matrix}$

So werden $x = \begin{matrix} -2 \\ -3,75 \end{matrix}$; $a - x = \begin{matrix} +12 \\ +13,75 \end{matrix}$

$y = \begin{matrix} -3 \\ -1,6 \end{matrix}$; $b - y = \begin{matrix} +11 \\ +9,6. \end{matrix}$

Indem nämlich die Größen a, b unverändert bleiben; die Größen p, p' aber verwechselt werden: so wechseln die Werthe von x und $x - a$, mit Veränderung ihrer Zeichen; und eben so die Werthe von y und $y - b$.

Man lößt also zugleich die drey Aufgaben auf: zwey Zahlen finden, deren Product gegeben ist; und deren Product auch gegeben ist,

1°. wenn man sie von gegebenen Zahlen abzieht;

2°. wenn man gegebene Zahlen von ihnen abzieht;

3°. wenn man gegebene Zahlen zu ihnen addirt.

Symbolisch. Man lößt zugleich die drey Aufgaben auf, welche durch die gemeinschaftliche Gleichung $xy = p$, und durch eine der drey Gleichungen 1°. $(a-x)(b-y) = p'$
2°. $(x-a)(y-b) = p'$
3°. $(x+a)(y+b) = p'$
bestimmt sind.

4. Anmerkung. Man lege z. B. die zweyte Aufgabe zum Grunde, zu welcher die Gleichungen $\begin{cases} xy = p \\ (x-a)(y-b) = p' \end{cases}$ gehören; und für welche

$$x = \frac{\frac{p-p'+ab}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{p+p'-ab}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{b}$$

$$y = \frac{\frac{p-p'+ab}{2} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{p+p'-ab}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{a}$$

$$x-a = \frac{\frac{p-p'-ab}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{p+p'-ab}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{b}$$

$$y-b = \frac{\frac{p-p-ab}{2} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{p+p'-ab}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{a}$$ sind.

Werden nun 1°. die Zeichen von a und b verändert: so erhält man

$$x = \frac{\frac{-p+p'-ab}{2} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{p+p'-ab}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{b}$$

$$y = \frac{\frac{-p+p'-ab}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{p+p'-ab}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{a}$$

$$x+a = \frac{\frac{ab-p+p'}{2} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{p+p'-ab}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{b}$$

$$y+b = \frac{\frac{ab-p+p'}{2} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{p+p'-ab}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{a}$$

als Auflösung der Aufgabe $\begin{cases} xy = p \\ (x+a)(y+b) = p' \end{cases}$

2°. Verändert man nur das Zeichen von a: so erhält man

$$x = \frac{\frac{p-p'-ab}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{p+p'+ab}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{b}$$

$$y = \frac{\frac{-p+p'+ab}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{p+p'+ab}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{a}$$

$$x+a = \frac{\frac{p-p'+ab}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{p+p'+ab}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{b}$$

$$y-b = \frac{\frac{-p+p'-ab}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{p+p'+ab}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{a}$$

als Auflösung der Aufgabe $\begin{cases} xy = p \\ (x+a)(y-b) = p' \end{cases}$

Eben so erhält man die Auflösung der Aufgabe $\begin{cases} xy = p \\ (x-a)(y+b) = p' \end{cases}$, wenn man nur das Zeichen von b ändert.

Für die Formeln, durch welche die Aufgabe $\begin{cases} xy = p \\ (x+a)(y-b) = p' \end{cases}$ aufgelöst wird, hat keine Gränze statt; oder die Aufgabe ist immer möglich. Anstatt, wie die vorhergehenden, sich auf die Aufgabe zu reduciren: zwey Größen finden, deren Summe und Product gegeben sind; reducirt sie sich nämlich auf die Aufgabe: zwey Grössen finden, deren Unterschied und Product gegeben sind.

5. **Anmerkung.** Die vorhergehende Formeln sind nur auf die Fälle anwendbar, in welchen a und b wirkliche Größen sind.

Sezt man z. B. $a=o$; so verwandeln sich die Gleichungen $\begin{cases} xy = p \\ (x-a)(y-b) = p' \end{cases}$ in diese $\begin{cases} xy = p \\ xy - bx = p' \end{cases}$: woraus folgt $bx = p - p'$; $x = \frac{p-p'}{b}$; und $y = \frac{p}{x} = \frac{bp}{p-p'}$

Die vorhergehende Formeln auf diesen Fall angewendet, geben

$$x = \frac{\frac{p-p'}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{p+p'}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{b} = \frac{\frac{p-p'}{2} \pm \frac{p-p'}{2}}{b} = \begin{cases} \frac{p-p'}{b} \\ \frac{o}{b} \end{cases}$$

von welchen Werthen nur der erste die Aufgabe beantwortet;

$$y = \frac{\frac{p-p'}{2} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{p+p'}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{o} = \frac{\frac{p-p'}{2} \mp \frac{p-p'}{2}}{o}$$

von welchen Ausdrücken keiner auf die Frage zu passen scheint.

Um den diesem besondern Fall entsprechenden Werth von y aus der allgemeinen Formel

$$y = \frac{\frac{p-p'+ab}{2} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{p+p'-ab}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{a}$$

herzuleiten; verwandle ich diese in die folgende

$$y = \frac{\left(\frac{p-p'+ab}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p+p'-ab}{2}\right)^2 - pp'\right)}{a\left(\frac{p-p'+ab}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{p+p'-ab}{2}\right)^2 - pp'\right)}\right)}$$

$$= \frac{bp}{\frac{p-p'+ab}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{p+p'-ab}{2}\right) - pp'\right)}}$$

welche, für $a=o$, giebt $y = \frac{bp}{\frac{p-p'}{2} \pm \frac{p-p'}{2}} = \begin{cases} \frac{bp}{p-p'} \\ \frac{bp}{o(p-p')} \end{cases}$

Der erste dieser Werthe von y beantwortet die durch die Gleichungen $\begin{cases} xy = p \\ x(y-b) = p' \end{cases}$ bestimmte Aufgabe; der zweyte aber ist unmöglich; und ist nur dadurch hereingekommen, daß die verschwindenden Producte des Factors a unschiklich noch als wirkliche Größen behandelt worden sind.

Wenn die beyde Größen a, b verschwinden; so reduciren sich die zwey Gleichungen $\begin{cases} xy = p \\ (x-a)(y-b) = p' \end{cases}$ auf die einige $xy = p$, indem $p = p'$ seyn muß; und die Aufgabe wird unbestimmt.

Die vorhergehende Formeln auf diesen Fall angewendet, geben

$$x = \frac{\frac{p-p'}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{p+p'}{2}\right)^2 - pp'\right)}}{0} = \begin{cases} \frac{p-p'}{0} \\ \frac{0}{0} \end{cases}$$

Der erste Ausdruk bedeutete Unmöglichkeit, wenn p nicht $= p'$ wäre: und für $p = p'$ zeigt er Unbestimmtheit an; so wie der zweyte.

Andere Beyspiele. Einer hat 100000 Gulden; und theilt sie in zwey Theile, die er zu verschiedenen Zinsraten anlegt, welche zusammen 12 von hundert ausmachen. Der Jahrszins des einen Theils ist 4200 Gulden; der des andern, 2000 Gulden. Welches sind die zwey Summen und ihre Zinsraten?

Von 40 Arbeitern, theils Männer, theils Weiber, haben alle Männer zusammen 432 Kreuzer, und alle Weiber zusammen 224 Kreuzer verdient; indem immer ein Mann und ein Weib zusammen 32 Kreuzer bekommen haben. Wieviel sind es Männer? Wieviel Weiber? Und wieviel ist jedem Mann und jedem Weib bezahlt worden?

Einer kauft eine gewisse Anzahl Ellen Zeug, und 12 Ellen mehr Tuch; und bezahlt für die Elle Tuch 16 Bazen

mehr als für die Elle Zeug. Im Ganzen bezahlt er für den Zeug 160 Bazen; und für das Tuch 728 Bazen. Wieviel sind es Ellen Zeug? Wieviel Ellen Tuch? Und welches ist der Preiß einer Elle von jedem?

Einige Personen machen zusammen eine Lustparthie; welche im Ganzen 28 Gulden 12 Bazen kostet. Um zwey davon frey zu halten, bezahlt jede der übrigen 2 Bazen mehr, als sie zu bezahlen gehabt hätte, wenn die Zeche unter alle gleich vertheilt worden wäre; und nun kommen 8 Bazen zuviel heraus. Wieviel sind es Personen? und wieviel bezahlt jede?

§. 95.

Aufgabe. Jede der drey gegebenen Zahlen a, b, c in zwey Theile so theilen: daß das Product des einen Theils von a durch den einen Theil von b der gegebenen Zahl p; das Product des zweyten Theils von b durch den einen Theil von c der gegebenen Zahl p'; und das Product des zweyten Theils von c durch den zweyten Theil von a der gegebenen Zahl p'' gleich sey.

Ben. Erster Theil von a . . . x

Erster Theil von b . . . $\frac{p}{x}$

Zweyter Theil von b . . . $b - \frac{p}{x} = \frac{bx-p}{x}$

Erster Theil von c . . . $\frac{p'}{\frac{bx-p}{x}} = \frac{p'x}{bx-p}$

Zweyter Theil von c . . . $c - \frac{p'x}{bx-p} = \frac{bcx-cp-p'x}{bx-p}$

Zweyter Theil von a . . . $\frac{p''}{\frac{bcx-cp-p'x}{bx-p}} = \frac{bp''x-pp''}{bcx-cp-p'x}$.

Bed. $\frac{bp''x-pp''}{bcx-cp-p'x} = a - x$.

Red. $bp''x - pp'' = abcx - acp - ap'x - bcx^2 + cpx + p'x^2$

$$xx(bc - p') - x(abc - ap' - bp'' + cp) + acp - pp'' = o.$$

Erster Fall. Es sey $bc = p'$. So reducirt sich die Aufgabe auf den ersten Grad; und man hat

$x = \frac{p(ac - p'')}{cp - bp''}$ . . . . erster Theil von a

$\frac{p}{x} = \frac{cp - bp''}{ac - p''}$ . . . . erster Theil von b

$b - \frac{p}{x} = \frac{c(ab - p)}{ac - p''} = \frac{ap' - cp}{ac - p''}$ . . . zweyter Theil von b

$\frac{p'x}{bx - p} = \frac{p'(ac - p'')}{ap' - cp}$ . . . . erster Theil von c

$c - \frac{p'x}{bx - p} = \frac{p'p'' - ccp}{ap' - cp} = \frac{c(bp'' - cp)}{ap' - cp} = \frac{bp'' - cp}{ab - p}$ . . zweyter Theil v. c

$\frac{p''}{c - \frac{p'x}{bx - p}} = \frac{p''(ab - p)}{bp'' - cp}$ . . . . zweyter Theil von a

$a - x = \frac{p''(p - ab)}{cp - bp''} = \frac{p''(ab - p)}{bp'' - cp}$; anderer, mit dem vorhergehender übereinstimmender Ausdruk des zweyten Theils von a.

Anmerkung. Wenn $bc = p'$, und auch $cp = bp''$; aber nicht zugleich $ac = p''$ ist; so ist die Aufgabe unmöglich: und wenn zugleich $bc = p'$
$cp = bp''$
$ac = p''$ sind, woraus $p = ab$ folgt; so ist die Aufgabe unbestimmt.

Zweyter Fall. Es sey $bc > p'$.

$$xx(bc - p') - x(abc - ap' - bp'' + cp) + p(ac - p'') = o$$

$$xx \quad - \frac{abc - ap' - bp'' + cp}{bc - p'}x + \frac{ac - p''}{bc - p'}p = o$$

$$xx - \frac{abc-ap'-bp''+cp}{bc-p'}x + \left(\frac{abc-ap'-bp''+cp}{2(bc-p')}\right)^2$$

$$= \left(\frac{abc-ap'-bp''+cp}{2(bc-p')}\right)^2 - \frac{ac-p''}{bc-p'}p$$

$$= \left(\frac{abc-ap'-bp''-cp}{2(bc-p')}\right)^2 + \frac{p}{bc-p'}\left(\frac{c(abc-ap'-bp'')}{bc-p'} - (ac-p'')\right)$$

$$= \left(\frac{abc-ap'-bp''-cp}{2(bc-p')}\right)^2 - \frac{p}{bc-p'} \times \frac{p'p''}{bc-p'}$$

$$= \frac{\left(\frac{abc-ap'-bp''-cp}{2}\right)^2 - pp'p''}{(bc-p')_2}$$

$$x - \frac{abc-ap'-bp''+cp}{2(bc-p')} = \pm \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{abc-ap'-bp''-cp}{2}\right)^2 - pp'p''\right)}}{bc-p'}$$

Aufl. $$x = \frac{\frac{abc-ap'-bp''+cp}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{abc-ap'-bp''-cp}{2}\right)^2 - pp'p''\right)}}{bc-p'}$$

$$\frac{p}{x} = \frac{p(bc-p')}{\frac{abc-ap'-bp''+cp}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{abc-ap'-bp''-cp}{2}\right)^2 - pp'p''\right)}}$$

$$= \frac{\frac{abc-ap'-bp''+cp}{2} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{abc-ap'-bp''-cp}{2}\right)^2 - pp'p''\right)}}{ac-p''}$$

$$b - \frac{p}{x} = \frac{\frac{abc+ap'-bp''-cp}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{abc-ap'-bp''-cp}{2}\right)^2 - pp'p''\right)}}{ac-p''}$$

$$\frac{p'}{b-\frac{p}{x}} = \frac{p'(ac-p'')}{\frac{abc+ap'-bp''-cp}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{abc-ap'-bp''-cp}{2}\right)^2 - pp'p''\right)}}$$

$$= \frac{\frac{abc+ap'-bp''-cp}{2} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{abc-ap'-bp''-cp}{2}\right)^2 - pp'p''\right)}}{ab-p}$$

$$c - \frac{p'}{b-\frac{p}{x}} = \frac{\frac{abc-ap'+bp''-cp}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{abc-ap'-bp''-cp}{2}\right)^2 - pp'p''\right)}}{ab-p}$$

$$a - x = \frac{\frac{abc-ap'+bp''-cp}{2} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{abc-ap'-bp''-cp}{2}\right)^2 - pp'p''\right)}}{bc-p'}$$

Gränze. Damit die Aufgabe möglich ist, muß $\left(\frac{abc-ap'-bp''-cp}{2}\right)^2 \gtreqless pp'p''$ seyn: und, da $\left(\frac{abc-ap'-bp''-cp}{2}\right)^2 = \left(\frac{ap'+bp''+cp-abc}{2}\right)^2$, so ergeben sich folgende zwey Bedingungen der Gränze;

$$abc - ap' - bp'' - cp \gtreqless 2\sqrt{pp'p''};$$
$$ap' + bp'' + cp - abc \gtreqless 2\sqrt{pp'p''}$$
oder $$abc \gtreqless ap' + bp'' + cp + 2\sqrt{pp'p''}$$
$$abc \lesseqgtr ap' + bp'' + cp - 2\sqrt{pp'p''}.$$

Diese zwey Bedingungen würden wiedersprechend seyn, wenn sie sich auf eine und dieselbe Aufgabe bezögen. Die ausführliche Auseinandersezung der vorhergehenden Aufgabe wird aber hinreichen begreiflich zu machen, daß diese Bestimmungen sich auf zwey genau miteinander verbundene Aufgaben beziehen, deren erste den Fall begreift, in welchem a, b, c die Summen sind von den Factoren der der Grösse nach gegebenen Producte; die zweyte aber auf einen der Fälle sich bezieht, in welchen einige der Größen a, b, c die Unterschiede jener Factoren sind.

Z. B. die Größe a sey der Ueberschuß des ersten Factors von p über den zweyten Factor von p'';

die Größe b bleibe die Summe des zweyten Factors von p, und des ersten Factors von p';

und die Größe c werde der Ueberschuß des zweyten Factors von p' über den ersten Factor von p'':

so behalten die Factoren von p ihre Zeichen; und auch die Factoren von p'; aber die Factoren von p'' verändern beyde ihr Zeichen; und so bleibt das Zeichen des Products p'' unverändert.

Bezeichnet man also durch x, y, z die nach dem buchstäblichen Sinn der Aussage so genannte Theile von a, b, c: so sind die zwey Aufgaben, für welche

$$xy = p \qquad\qquad xy = p$$
$$(b-y)z = p' \qquad\qquad (b-y)z = p'$$
$$(c-z)(a-x) = p'' \qquad (z-c)(x-a) = p''$$

so beschaffen, daß ihre Auflösung von den relativen Größen der gegebenen a, b, c, p, p', p'' abhängt.

Es wäre zu weitläuftig die Unterschiede aller durch die vorhergehende Formeln aufgelösten Fälle auseinander zu sezen: und ich glaube, mich dessen überheben zu können, da das für den Fall von zwey gegebenen Summen oder Differenzen Gesagte hiebey zum Muster dienen kann.

Anmerkung. Es ergiebt sich von selbst: daß das nämliche Verfahren sich auf irgend eine Anzahl gegebener Summen oder Differenzen anwenden läßt; daß aber auch die Formeln um so viel verwikelter werden, je größer die Anzahl der gegebenen Größen ist.

Beyspiele der vorhergehenden Formeln.

1. Es seyen $a = 9;\quad p = 32$
$b = 12\quad p' = 40$
$c = 16\quad p'' = 30.$

So sind $abc = 1728;\quad \frac{abc-(ap'+bp''+cp)}{2} = 248$

$$ap' = 360\quad \left(\frac{abc-(ap'+bp''+cp)}{2}\right)^2 = 61504$$
$$bp'' = 360$$
$$cp = 512\quad pp'p'' = 38400$$
$$\left(\frac{abc-(ap'+bp''+cp)}{2}\right)^2 - pp'p'' = 23104$$
$$\sqrt{\left(\left(\frac{abc-(ap'+bp''+cp)}{2}\right)^2 - pp'p''\right)} = 152$$
$$x = \frac{248+512\pm152}{152} = \frac{760\pm152}{152} = 5\pm1.$$

Also $x = 6; \quad 4$

$$\frac{p}{x} = 5\tfrac{1}{3} \quad 8$$

$$b - \frac{p}{x} = 6\tfrac{2}{3} \quad 4$$

$$\frac{p'}{b - \frac{p}{x}} = 6 \quad 10$$

$$c - \frac{p'}{b - \frac{a}{x}} = 10 \quad 6$$

$$a - x = 3 \quad 5$$

2. Beyspiel. Es seyen $a = 9; \quad p = 60$
$b = 12 \quad p' = 126$
$c = 16 \quad p'' = 6$

So sind $abc = 1728$
$ap' = 1134 \qquad ap' + bp'' + cp = 2166$
$bp'' = 72 \qquad pp'p'' = 45360$
$cp = 960$

Da $ap' + bp'' + cp > abc$ ist: so muß man die Formel $ap' + bp'' + cp - abc$ anwenden; und findet

$$\frac{ap' + bp'' + cp - abc}{2} = 219$$

$$\left(\frac{ap' + bp'' + cp - abc}{2}\right)^2 = 47961$$

$$\left(\frac{ap' + bp'' + cp - abc}{2}\right)^2 - pp'p'' = 2601$$

$$\sqrt{\left(\left(\frac{ap' + bp'' + cp - abc}{2}\right)^2 - pp'p''\right)} = 51$$

$$x = 12; \quad 10\tfrac{5}{11}$$

$$\frac{p}{x} = 5 \quad 5\tfrac{17}{23}$$

$$b - \frac{p}{x} = 7 \quad 6\tfrac{6}{23}$$

$$\frac{p'}{b - \frac{p}{x}} = \quad 18 \qquad 20\tfrac{1}{8}$$

$$c - \frac{p'}{b - \frac{p}{x}} = -2 \qquad -4\tfrac{1}{8}$$

$$a - x = -3 \qquad -1\tfrac{5}{11}.$$

§ 96.

Aufgabe. Die Summe der Grundlinien zweyer gleichen Rectangel ist 100 Fuß. Wenn das erste Rectangel so hoch wäre als das zweyte, so machte seine Fläche 720 Quadratfuß; hätte aber das zweyte Rectangel die Höhe des ersten, so wäre seine Fläche 320 Quadratfuß. Welches sind die Seiten dieser Rectangel?

Durch Räsonnement. Weil die zwey Rectangel gleich sind, so sind ihre Seiten umgekehrt proportional; d. h. die Grundlinie des ersten verhält sich zur Grundlinie des zweyten, wie die Höhe des zweyten zur Höhe des ersten: das Rectangel aus der Grundlinie des ersten und der Höhe des zweyten verhält sich also zu dem Rectangel aus der Grundlinie des zweyten und der Höhe des ersten, wie das Quadrat der Höhe des zweyten zu dem Quadrat der Höhe des ersten; folglich auch wie das Quadrat der Grundlinie des ersten zu dem Quadrat der Grundlinie des zweyten. Die zwey Glieder des ersten Verhältnisses aber sind der Größe nach gegeben; nämlich gleich 720 und 320 Quadratfuß. Das Quadrat der Grundlinie des ersten Rectangels verhält sich mithin zu dem Quadrat der Grundlinie des zweyten, wie 720 zu 320, oder wie 9 zu 4; und die Grundlinie des ersten Rectangels verhält sich zur Grundlinie des zweyten, wie 3 zu 2. Da nun die Summe der zwey Grundlinien 100 Fuß ist: so ist die Grundlinie des ersten Rectangels die drey Fünftel von 100, d. i. 60; und die des zweyten, zwey Fünftel von 100, d. i. 40 Fuß.

Grundlinie des 1ten Rectangels . . . 60;

. . . . 2ten 40

Höhe des 2ten Rectangels . . . $\frac{720}{60} = 12$

. . . 1ten . . . . $\frac{320}{40} = 8$

Fläche des 1ten Rectangels . . . $60 \times 8 = 480$

. . . 2ten . . . . . . $40 \times 12 = 480$.

Algebraisch.

Ben. Grundlinie des 1ten Rectangels . . . x

. . . . . . 2ten . . . . . $100 - x$

Höhe des 2ten . . . . . $\frac{720}{x}$

. . . . . 1ten . . . . . $\frac{320}{100-x}$

Fläche des 1ten . . . . . $\frac{320x}{100-x}$

. . . . . 2ten . . . . . $\frac{720(100-x)}{x}$

Bed. $\frac{320x}{100-x} = \frac{720(100-x)}{x}$.

Red. $\frac{4x}{100-x} = \frac{9(100-x)}{x}$

$$4xx = 9(100-x)^2$$

$$xx : (100-x)^2 = 9 : 4$$

$$x : 100-x = 3 : 2$$

$x : 100 = 3 : 5$; $x = \frac{3}{5}100 = 60$ wie vorhin.
$100 : 100-x = 5 : 2$; $100-x = \frac{2}{5}100 = 40$

Andere Beyspiele. Zwey Bäurinnen, die zusammen 200 Eyer hatten, haben gleichviel gelöst. Wenn aber die erste ihre Eyer um eben den Preiß verkauft hätte wie die zweyte, so hätte sie 124 Kreuzer gelöst; und wenn die zweyte ihre Eyer um den Preiß verkauft hätte wie die erste, so hätte sie nur 80 Kreuzer gelöst. Wieviel Eyer hatte jede? und in welchem Preiß hat jede die ihrige verkauft?

Ein Handelsmann verkauft zwey Stüke Tuch, wovon das zweyte 20 Ellen mehr hält als das erste; und löst gleichviel daraus. Er würde aber aus dem ersten Stük nur 90, hingegen aus dem zweyten 250 Gulden erlöst haben, wenn er die Elle des ersten Stüks um den Preis der Elle des zweyten, und umgekehrt, die Elle des zweyten um den Preis der Elle des ersten verkauft hätte. Wieviel Ellen hatte jedes Stük? Und was ist der Preiß der Elle eines jeden?

Die Gleichheit der zwey ersten Producte erleichtert die Auflösung dieser Aufgaben sehr. Sie wird etwas verwikkelter, wenn eine andere Beziehung jener Producte, z. B. ihre Summe oder Differenz gegeben ist.

Aufgabe. Die Summe der Grundlinien zweyer Rectangel ist $= b$; die Summe ihrer Flächen $= s$. Hätte das erste Rectangel die Höhe des zweyten, so wäre seine Fläche $= p$; hätte aber das zweyte die Höhe des ersten, so wäre seine Fläche $= p'$. Welches sind die Seiten dieser Rectangel?

Ben.	Grundlinie des	1sten Rectangels	. . .	x
	. . . .	2ten	. . . . .	$b-x$
	Höhe des	2ten	. . . . .	$\frac{p}{x}$
	. . . .	1ten	. . . . .	$\frac{p'}{b-x}$
	Fläche des	1ten	. . . . .	$\frac{p'x}{b-x}$
	. . . .	2ten	. . . . .	$\frac{p(b-x)}{x}$

Bed. $\frac{p'x}{b-x} + \frac{p(b-x)}{x} = s.$

Red. $p'xx + p(b-x)^2 = sx(b-x)$

$xx(p+p') - 2bpx + bbp = bsx - sxx$

$$xx(p+p'+s) - bx(2p+s) + bbp = 0$$

$$4xx(p+p'+s)^2 - 4bx(2p+s)(p+p'+s) + 4bbp(p+p'+s) = 0$$

$$4xx(p+p'+s)^2 - 4bx(2p+s)(p+p'+s) + bb(2p+s)^2$$

$$= bb((2p+s)^2 - 4p(p+p'+s))$$

$$= bb(ss - 4pp')$$

$$2x(p+p'+s) - b(2p+s) = \pm b\sqrt{(ss - 4pp')}$$

Aufl. $x = \frac{b(2p+s) \pm b\sqrt{(ss-4pp')}}{2(p+p'+s)} = b \times \frac{p+\frac{1}{2}s \pm \sqrt{(\frac{1}{4}ss-pp')}}{p+p'+s}$

$$b - x = b \times \frac{p'+\frac{1}{2}s \mp \sqrt{(\frac{1}{4}ss-pp')}}{p+p'+s}$$

$$\frac{p}{x} = \frac{p(p+p'+s)}{b(p+\frac{1}{2}s \pm \sqrt{(\frac{1}{4}ss-pp')})}$$

$$= \frac{p(p+p'+s)(p+\frac{1}{2}s \mp \sqrt{(\frac{1}{4}ss-pp')})}{b(pp+ps+pp')}$$

$$= \frac{p+\frac{1}{2}s \mp \sqrt{(\frac{1}{4}ss-pp')}}{b}$$

$$\frac{p'}{b-x} = \frac{p'(p+p'+s)}{b(p'+\frac{1}{2}s \mp \sqrt{(\frac{1}{4}ss-pp')})}$$

$$= \frac{p'(p+p'+s)(p'+\frac{1}{2}s \pm \sqrt{(\frac{1}{4}ss-pp')})}{b(p'p'+p's+pp')}$$

$$= \frac{p'+\frac{1}{2}s \pm \sqrt{(\frac{1}{4}ss-pp')}}{b}$$

$$\frac{p'x}{b-x} = \frac{(p+\frac{1}{2}s)(p'+\frac{1}{2}s) \pm (p+p'+s)\sqrt{(\frac{1}{4}ss-pp')} + \frac{1}{4}ss-pp'}{p+p'+s}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}ps+\frac{1}{2}p's+\frac{1}{2}ss \pm (p+p'+s)\sqrt{(\frac{1}{4}ss-pp')}}{p+p'+s}$$

$$= \frac{1}{2}s \pm \sqrt{(\frac{1}{4}ss-pp')}$$

$$\frac{p(b-x)}{x} = \frac{(p+\frac{1}{2}s)(p'+\frac{1}{2}s) \mp (p+p'+s)\sqrt{(\frac{1}{4}ss-pp')} + \frac{1}{4}ss-pp'}{p+p'+s}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}ps+\frac{1}{2}p's+\frac{1}{2}ss \mp (p+p'+s)\sqrt{(\frac{1}{4}ss-pp')}}{p+p'+s}$$

$$= \frac{1}{2}s \mp \sqrt{(\frac{1}{4}ss - pp')}$$

Probe. $\frac{p'x}{b-x} + \frac{p(b-x)}{x} = s.$

Gränze. Damit die Aufgabe möglich ist; muß die gegebene halbe Summe der Flächen der zwey Rectangel nicht kleiner seyn als die mittlere geometrische Proportionalgröße zwischen den zwey andern gegebenen Flächen.

Beyspiel. Es seyen $b = 120$; $p = 960$
$s = 1608$; $p' = 672$

So werden $x = 120 \times \frac{1764 \pm 436}{3240} = 66\frac{2}{3}$; 64

$b - x$	$= 53\frac{1}{3}$	56
$\frac{p}{x}$	$= 14{,}4$	15
$\frac{p'}{b-x}$	$= 12{,}6$	12
$\frac{p'x}{b-x}$	$= 840$	768
$\frac{p(b-x)}{x}$	$= 768$	$840.$

Allgemeine Aufgabe. Die Seiten zweyer Rectangel finden, deren Summe oder Unterschied der Grundlinien, Summe oder Unterschied der Flächen, und die Größen der Flächen gegeben sind, welche durch Verwechslung der Höhen der zwey Rectangel entstehen würden.

Andere Beyspiele. Zwey Kaufleute haben 120 Ellen Zeug zusammen für 1090 Bazen verkauft. Der erste würde aus seinem Zeug 550 Bazen gelöst haben, wenn er ihn der Elle nach um den Preiß verkauft hätte, um welchen der zweyte die Elle seines Zeugs verkauft hat; und der zweyte hätte bey dem Preis des ersten 520 Bazen gelöst. Wieviel Ellen hat jeder verkauft? und wie theuer die Elle?

Der erste hat 12 Ellen mehr verkauft als der andere: sie haben zusammen 1756 Bazen gelöst: bey Verwechslung ihrer EllenPreise hätte der erste 780; der zweyte 936 Bazen gelöst.

Der erste hat 16 Ellen mehr verkauft, und 432 Bazen mehr gelöst als der andere: mit verwechselten Ellen-Preisen hätte der erste 804; der andere 910 Bazen gelöst.

Beyde zusammen haben 136 Ellen verkauft; und der erste hat 192 Bazen mehr gelöst als der andere: der Zeug des ersten zu dem Preiß des Zeugs des zweyten verkauft hätte 512; und der Zeug des zweyten in dem Preiß des ersten, 864 Bazen abgeworfen.

§. 97.

Aufgabe. Zwey Handelsleute haben zusammen 10000 Gulden. Jeder gewinnt jährlich in dem Verhältniß seines Capitals. Unter der Voraussezung, daß sie den Gewinn nicht jährlich gleich wieder zu dem Capital schlagen; hat der erste 9900 Gulden am Ende von drey Jahren; und der zweyte, ebensoviel am Ende von zwey Jahren. Welches ist das Capital und der Gewinn eines jeden?

Ben.	Capital des ersten	x
	. . . zweyten	$10000 - x$
	Gewinn des ersten während 3 Jahren	$9900 - x$
	. . . zweyten . . 2	$x - 100$
	Jährlicher Gewinn des ersten . . .	$\frac{9900-x}{3}$
	. . . . zweyten	$\frac{x-100}{2}$

Bed. $\frac{9900-x}{3} : \frac{x-100}{2} = x : 10000 - x.$

Red. $(9900-x)(10000-x):x(x-100)=3:2$

$$99000000-19900x+xx:xx-100x=3:2$$

$$198000000-39800x+2xx \quad =3xx-300x$$

$$198000000 \quad =xx+39500x$$

$$xx+39500x+390062500 \quad =588062500$$

$$x+19750 \quad =\pm 24250$$

$$x \quad =\begin{cases} 4500 \\ -44000 \end{cases}$$

Ich halte mich an die erste Auflösung.

Aufl. $x=4500$; $9900-x=5400$; $\frac{9900-x}{3}=1800$

$10000-x=5500$; $x-100=4400$; $\frac{x-100}{2}=2200$

Probe. $1800: 2200= 4500: 5500$

Oder $2\times 900:2\times 1100=5\times 900:5\times 1100$.

Andere Beyspiele. Die Summe der Capitalien ist 120000 Gulden. Der erste hat am Ende von 3 Jahren 70200; der zweyte am Ende von 5 Jahren 99000 Gulden.

Der erste hat anfangs 40000 Gulden mehr als der zweyte. Zu Ende von 4 Jahren hat der erste 217600 Gulden; und der zweyte hat 174000 Gulden am Ende von 5 Jahren.

§. 98.

Aufgabe. Die gegebene Zahl 2a in zwey Theile so theilen, daß das Quadrat des einen Theils gleich sey dem Product des andern Theils durch die gegebene Zahl 2a.

Ben. Erster Theil . . . . x;

Zweyter . . . . $2a-x$

Quadrat des ersten Theils xx

Product von 2a durch den zweyten Theil $4aa-2ax$

Bed.	xx	$=4aa-2ax$
Red.	$xx+2ax$	$=4aa$
	$xx+2ax+aa$	$=5aa$
	$x+a$	$=\pm a\sqrt{5}$
Aufl.	x	$=-a\pm a\sqrt{5};$
	$2a-x$	$=3a\mp a\sqrt{5};$
	xx	$=aa(6\mp 2\sqrt{5})$
	$2a(2a-x)$	$=2aa(3\mp\sqrt{5})=aa(6\mp 2\sqrt{5})$

1. Anmerkung. Die Werthe der unbekannten Grösse sind irrationel; und ihre Incommensurabilität rührt von der in ihren Ausdruk eingeflochtenen Quadratwurzel von 5 her.

2. Anmerkung. Der erste Werth von x beantwortet die Aufgabe nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage. Verändert man aber das Zeichen seines zweyten Werths, wodurch derselbe $a(1+\sqrt{5})$ wird; so ist der zweyte Werth von $2a-x$, nämlich $a(3+\sqrt{5})$, die Summe, und nicht der Unterschied, der gegebenen Zahl $2a$ und der gesuchten x.

3. Anmerkung. Die folgende Reihe ist sehr geschikt die Werthe der verlangten Theile der gegebenen Zahl mit fortschreitender Annäherung auszudrücken:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

In dieser Reihe, welche mit den zwey ersten natürlichen Zahlen anfängt, ist jedes Glied die Summe der zwey unmittelbar vorhergehenden; und stellt mithin insofern eine in zwey, den zwey vorhergehenden Gliedern gleiche Theile zerfällte Zahl vor.

Aber auch das Quadrat jeden Glieds ist von dem Product der zwey Glieder, zwischen welchen es steht, immer nur um eine Einheit unterschieden; um welche es wechselsweise grösser und kleiner ist.

Nämlich $2^2 = 1 \times 3 + 1$

$$3^2 = 2 \times 5 - 1$$
$$5^2 = 3 \times 8 + 1$$
$$8^2 = 5 \times 13 - 1$$
$$13^2 = 8 \times 21 + 1$$

u. s. w.

Und diese Eigenschaft haben jede drey unmittelbar auf einander folgende Glieder der angegebenen Reihe: da, wenn sie für irgend drey solche Glieder statt hat, auch das hinzukommende vierte Glied und die zwey, auf welche es folgt, dieselbe haben. Sind nämlich a, b zwey unmittelbar auf einander folgende Glieder jener Reihen; also $a+b$, $a+2b$, die auf sie folgende Glieder; und ist $bb = a(a+b) \pm dd$; so ist $(a+b)^2 = b(a+2b) \mp dd$.

Denn wenn $bb = a(a+b) \pm dd$ ist:

so ist $a(a+b) = bb \mp dd$

$$a(a+b) + b(a+b) = bb + b(a+b) \mp dd$$

d. h. $(a+b)^2 = b(a+2b) \mp dd.$

Allgemeinere Aufgabe. Die gegebene Zahl 2a in zwey Theile so theilen, daß das Quadrat des einen Theils gleich sey dem Product des andern Theils durch die gegebene Zahl 2b.

Ben. Erster Theil x

zweyter . . . . . 2a—x.

Bed. $xx = 2b(2a - x)$

Red. $xx + 2bx = 4ab$

$$xx + 2bx + bb = bb + 4ab = b(4a+b)$$
$$x + b = \pm\sqrt{b(4a+b)}$$

Aufl. $x = -b \pm \sqrt{b(4a+b)}$

$2a-x = 2a+b \mp \sqrt{b(4a+b)}$

$xx = 2bb \mp 2b\sqrt{b(4a+b)} + 4ab$

$= 2b(2a+b \mp \sqrt{b(4a+b)}) = 2b(2a-x).$

§ 99.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden, deren Unterschied 2a gegeben ist; so daß das Quadrat der kleineren gleich sey dem Product der größeren durch die gegebene Differenz.

Ben. Kleinere Zahl . . . x
größere . . . . $2a+x$

Bed. $xx = 2a(2a+x).$

Red. $xx - 2ax = 4aa$
$xx - 2ax + aa = 5aa$
$\left.\begin{matrix} x-a \\ a-x \end{matrix}\right\} = a\sqrt{5}$; $x-a = \pm a\sqrt{5}$; $x = a(1 \pm \sqrt{5})$

Aufl. $x = a(1 \pm \sqrt{5})$
$2a+x = a(3 \pm \sqrt{5}).$

Andere Beyspiele. Einer verkauft ein Pfund für 11 Carolin; und gewinnt daran so viel von hundert, als das Pfund ihn gekostet hat. Wie theuer hat er das Pferd gekauft? und wieviel hat er gewonnen?

§. 100.

Aufgabe. Die gegebene Zahl 2a in zwey Theile so theilen, daß ihr Product dem Unterschiede ihrer Quadrate gleich sey.

Ben. Erster Theil . . . . x;
zweyter . . . . $2a-x$;
Product $2ax - xx$;
Quadrate $\begin{matrix} xx \\ 4aa - 4ax + xx \end{matrix}$

Unterschied derselben $4ax - 4aa$

Bed. $2ax - xx = 4ax - 4aa.$

Red. $xx + 2ax = 4aa$

$xx + 2ax + aa = 5aa$

$x + a = \pm a\sqrt{5}$

$x = -a \pm a\sqrt{5} = a(-1 \pm \sqrt{5}).$

Es sind also die nämlichen Zahlen, welche diese, und die Aufgabe §. 98. beantworten.

§. 101.

Aufgabe. Die Zahl 2a in zwey Theile theilen, die sich zu einander verhalten, wie ihre Summe zu ihrem Unterschied.

Ben. Erster Theil . . . x

zweyter . . . $2a - x$

Unterschied . . $2x - 2a.$

Bed. $x : 2a - x = a : x - a.$

Red. $x(x - a) = a(2a - x)$

$xx - ax = 2aa - ax$

$xx = 2aa$

$x = \pm a\sqrt{2}$

Aufl. $x = a\sqrt{2}$

$2a - x = a(2 - \sqrt{2}) = a\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$

$2x - 2a = 2a(\sqrt{2} - 1).$

Die gesuchten Theile sind also ebenfalls incommensurabel.

§. 102.

Aufgabe. Einen Würfel finden, dessen Inhaltsänderung man kennt, welche gegebenen Verlängerungen oder Verminderungen seiner Seiten entspricht.

Der Würfels Inhalt ändere sich um die Größe p, indem seine Seiten sich um die Längen a, b, c ändern.

Erste Voraussezung. Die Seiten des Würfels wachsen um die Längen a, b, c.

Ben. Seite des Würfels . . . x
Inhalt . . . . . x^3
verlängerte Seiten . . . $x+a, x+b, x+c$
Inhalt des entstandenen Parallelepipedum . . . $(x+a)(x+b)(x+c)$
$= x^3+xx(a+b+c)+x(ab+ac+bc)+abc$
Inhaltszuwachs $xx(a+b+c)+x(ab+ac+bc)+abc$

Bed.

$$xx(a+b+c) + x(ab+ac+bc) + abc = p$$

Red.

$$4xx(a+b+c)^2+4x(a+b+c)(ab+ac+bc)+4abc(a+b+c) = 4p(a+b+c)$$

$$4xx(a+b+c)^2 + 4x(a+b+c)(ab+ac+bc)+(ab+ac+bc)^2 = (ab+ac+bc)^2+4(p-abc)(a+b+c)$$

$$2x(a+b+c)+ab+ac+bc = \pm\sqrt{((ab+ac+bc)^2+4(p-abc)(a+b+c))}$$

Aufl. $x = \frac{-(ab+ac+bc)\pm\sqrt{((ab+ac+bc)^2+4(p-abc)(a+b+c))}}{2(a+b+c)}$

$$x+a = \frac{2a(a+b+c)-(ab+ac+bc)\pm\sqrt{((ab+ac+bc)^2+4(p-abc)(a+b+c))}}{2(a+b+c)}$$

$$x+b = \frac{2b(a+b+c)-(ab+ac+bc)\pm\sqrt{((ab+ac+bc)^2+4(p-abc)(a+b+c))}}{2(a+b+c)}$$

$x+c=$

$$x+c = \frac{2c(a+b+c)-(ab+ac+bc)\pm\sqrt{((ab+ac+bc)^2+4(p-abc)(a+b+c))}}{2(a+b+c)}$$

$$xx(a+b+c) = \frac{(ab+ac+bc)^2+2(a+b+c)(p-abc)\mp(ab+ac+bc)\sqrt{((ab+ac+bc)^2+4(p-abc)(a+b+c))}}{2(a+b+c)}$$

$$x(ab+ac+bc) = \frac{-(ab+ac+bc)^2 \qquad \pm(ab+ac+bc)\sqrt{((ab+ac+bc)^2+4(p-abc)(a+b+c))}}{2(a+b+c)}$$

$$xx(a+b+c)+x(ab+ac+bc)=\frac{2(a+b+c)(p-abc)}{2(a+b+c)}=p-abc.$$

Probe. $xx(a+b+c)+x(ab+ac+bc)+abc=p$

1. Anmerkung. Die Aufgabe ist möglich, wenn die Größe unter dem Wurzelzeichen positiv ist; welches insbesondere statt hat, wenn $p > abc$ ist.

Der erste Werth $x =$

$$\frac{-(ab+ac+bc)+\sqrt{((ab+ac+bc)^2+4(p-abc)(a+b+c))}}{2(a+b+c)}$$

ist positiv; und beantwortet die Frage nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage.

Der zweyte Werth $x =$

$$\frac{-(ab+ac+bc)-\sqrt{((ab+ac+bc)^2+4(p-abc)(a+b+c))}}{2(a+b+c)}$$

ist negativ; und gehört zu der Aufgabe, für welche

$$(-x+a)(-x+b)(-x+c)-(-x^3)=p$$

oder $\quad x^3-(x-a)(x-b)(x-c) \quad = p$ ist.

Die vorgelegte Aufaabe enthält also auch die genau mit ihr verbundene: Welches ist die Seite des Würfels, dessen Inhalt um die Größe p abnimmt, indem seine Seiten die gegebene Verminderungen a, b, c leiden? Die Gleichung für diese Aufgabe ist nämlich

$$x^3-(x-a)(x-b)(x-c)=xx(a+b+c)-x(ab+ac+bc)+abc=p;$$

woraus folgt $x=\frac{ab+ac+bc\pm\sqrt{((ab+ac+bc)^2+4(p-abc)(a+b+c))}}{2(a+b+c)}$

Der erste dieser Werthe beantwortet die Frage nach dem eigentlichen Sinn ihrer Aussage $x^3-(x-a)(x-b)(x-c)=p$

Wenn $p>abc$ ist: so ist der zweyte Werth negativ, und gehört zu der Aufgabe $-x^3-(-x-a)(-x-b)(-x-c)p=p$ oder $(x+a)(x+b)(x+c)-x^3=p$.

Unter der Voraussezung $p>abc$, werden also die zwey den Bedingungen $(x+a)(x+b)(x+c)-x^3=p$, $x^3-(x-a)(x-b)(x-c)=p$ entsprechende Aufgaben zugleich aufgelöst.

2. Anmerkung. Die Gleichung

$$x^3-(x-a)(x-b)(x-c)=p$$

ist einerley mit jeder der folgenden

$$x^3-(a-x)(b-x)(c-x)=p$$
$$x^3-(a-x)(x-b)(c-x)=p$$
$$x^3-(x-a)(b-x)(c-x)=p$$
$$x^3+(a-x)(x-b)(x-c)=p$$
$$x^3+(x-a)(b-x)(x-c)=p$$
$$x^3+(x-a)(x-b)(c-x)=p$$
$$x^3+(a-x)(b-x)(c-x)=p$$

Mit der Gleichung $(x+a)(x+b)(x+c)-x^3=p$ wird also zugleich eine dieser 8 Gleichungen aufgelöst, je nachdem die Factoren $x-a$, $x-b$, $x-c$ positiv bleiben, oder negativ werden.

Ich will dieses durch ein auf den Factor $x-a$ sich beziehendes Beyspiel erläutern.

Der Werth $x=$

$$\frac{ab+ac+bc+\sqrt{((ab+ac+bc)^2+4(p-abc)(a+b+c))}}{2(a+b+c)}$$ ist $\gtreqless a$,

je nachdem

$$\sqrt{((ab+ac+bc)^2+4(p-abc)(a+b+c))} \gtreqless 2a(a+b+c)-(ab+ac+bc)$$

$$(ab+ac+bc)^2+4(p-abc)(a+b+c) \gtreqless \begin{cases} 4aa(a+b+c)^2 \\ -4a(a+b+c)(ab+ac+bc) \\ +(ab+ac+bc)^2 \end{cases}$$

$$p-abc \gtreqless aa(a+b+c)-a(ab+ac+bc)$$

$$\gtreqless a^3+aa(b+c)-aa(b+c)-abc$$

$$\gtreqless a^3 -abc$$

folglich $p \gtreqless a^3$ ist.

Wenn daher zugleich $p \begin{cases} > a^3 \\ > b^3 \\ > c^3 \end{cases}$ ist; so löst man die Aufgabe auf $x^3-(x-a)(x-b)(x-c)=p$.

Ist aber $p \begin{cases} > a^3 \\ > b^3 \\ < c^3 \end{cases}$; so ist die aufgelöste Aufgabe $x^3+(x-a)(x-b)(c-x)=p$

: : $p \begin{cases} > a^3 \\ < b^3 \\ > c^3 \end{cases}$; . . . . $x^3+(x-a)(b-x)(x-c)=p$

: : $p \begin{cases} < a^3 \\ > b^3 \\ > c^3 \end{cases}$; . . . . $x^3+(a-x)(x-b)(x-c)=p$

: : $p \begin{cases} > a^3 \\ < b^3 \\ < c^3 \end{cases}$; . . . . $x^3-(x-a)(b-x)(c-x)=p$

: : $p \begin{cases} < a^3 \\ > b^3 \\ < c^3 \end{cases}$; . . . . $x^3-(a-x)(x-b)(c-x)=p$

: : $p \begin{cases} < a^3 \\ < b^3 \\ > c^3 \end{cases}$; . . . . $x^3-(a-x)(b-x)(x-c)=p$

: : $p \begin{cases} < a^3 \\ < b^3 \\ < c^3 \end{cases}$; . . . . $x^3+(a-x)(b-x)(c-x)=p$

3. Anmerkung. Wird in den aus der Gleichung $x^3-(x-a)(x-b)(x-c)=p$ hergeleiteten Werthen von x,

welche sind $x = \frac{ab+ac+bc \pm \sqrt{((ab+ac+bc)^2 + 4(p-abc)(a+b+c))}}{2(a+b+c)}$,

gesezt $p < abc$: so erhält man

$$x = \frac{ab+ac+bc \pm \sqrt{((ab+ac+bc)^2 - 4(abc-p)(a+b+c))}}{2(a+b+c)}.$$

Diese beyde Werthe sind positiv; folglich wird nicht zugleich die der Gleichung $(x+a)(x+b)(x+c) - x^3 = p$ entsprechende Aufgabe aufgelöst: sondern jede der zwey Auflösungen gehört zu einer der 8 in der vorhergehenden Anmerkung dargestellten Gleichungen; und man bestimmt, wie in dieser Anmerkung, zu welchen von diesen Gleichungen sie gehören.

In diesem Fall muß, damit die Werthe von x möglich sind,

$$(ab+ac+bc)^2 \overline{\gtrless} 4(abc-p)(a+b+c),$$

folglich $\quad abc - p \; \overline{\overline{<}} \; \frac{\left(\frac{ab+ac+bc}{2}\right)^2}{a+b+c}$ seyn.

Zweyte Voraussezung. Zwey Seiten des Würfels wachsen um die Längen a, b; und die dritte werde um die Länge c vermindert: oder a, b seyen positiv; c, negativ.

So hat man die Gleichung aufzulösen

$$(x+a)(x+b)(x-c) - x^3 \quad = p$$

oder $xx(a+b-c) + x(ab-ac-bc) - abc = p$

Erster Fall. $a+b$ sey $> c$: so wird

$$x = \frac{-ab+ac+bc \pm \sqrt{((-ab+ac+bc)^2 + 4(p+abc)(a+b-c))}}{2(a+b-c)}$$

Diese beyden Werthe von x sind reell. Der erste ist positiv: der zweyte ist negativ, und gehört zu der Gleichung

$$(-x+a)(-x+b)(-x-c) - (-x)^3 = p$$

oder $\quad x^3 a - (-x)(b-x)(c+x) \qquad = p$

Diese ist aber einerley mit den drey folgenden

$$x^3-(x-a)(x-b)(x+c) = p$$
$$x^3+(a-x)(x-b)(x+c) = p$$
$$x^3+(x-a)(b-x)(x+c) = p$$

Der zweyte Werth von x, positiv genommen, gehört also zu einer dieser vier Gleichungen; und die Fälle, in welchen er jede derselben auflöst, werden ebenso wie in der 2ten Anmerkung der 1ten Voraussezung bestimmt.

Zweyter Fall. $a+b$ sey $=c$; also $(a+b)^2=c(a+b)$. Oder $(a+b)^2(>4ab)>ab$: folglich $c(a+b)>ab$. Die ursprüngliche Gleichung wird daher

$$-x(ac+bc-ab)-abc=p$$

woraus folgt $x=-\frac{p+abc}{ac+bc-ab}$

Die Gleichung ist also nur von dem ersten Grade; und giebt einen negativen Werth von x, der einer der vier zulezt erwähnten Gleichungen zugehört.

Um diesen Werth von x aus dem für den ersten Fall erhaltenen Ausdruk von x herzuleiten, verwandle man diesen in folgenden

$$x=\frac{-4(p+abc)(a+b-c)}{2(a+b-c)(-ab+ac+bc\mp\sqrt{((-ab+ac+bc)^2+4(p+abc)(a+b-c))}}$$
$$=\frac{-2(p+abc)}{-ab+ac+bc\pm\sqrt{((-ab+ac+bc)^2+4(p+abc)(a+b-c))}}$$

Sezt man nun $a+b=c$: so wird der erste Werth

$x=\frac{-2(p+abc)}{-ab+ac+bc-(-ab+ac+bc)}=-\frac{2(p+abc)}{0(-ab+ac+bc)}$ unmöglich;

und der zweyte

$x=\frac{-2(p+abc)}{2(-ab+ac+bc)}=-\frac{p+abc}{ac+bc-ab}$ ist der vorhin gefundene.

Dritter Fall. $a+b$ sey $<c$.

So wird die ursprüngliche Gleichung

$$-x^2(c-a-b)-x(ac+bc-ab)-abc=p$$

oder $x^2(c-a-b)+x(ac+bc-ab)+p=-abc$

woraus $x=\frac{-(ac+bc-ab)\mp\sqrt{((ac+bc-ab)^2-4(p+abc)(c-a-b))}}{2(c-a-b)}$

Diese beyden Werthe von x sind negativ; und, damit sie reell sind, muß $p+abc \overline{\overline{<}} \frac{\left(\frac{ac+bc-ab}{2}\right)^2}{c-a-b}$ seyn.

Anmerkung. Man verändere das Zeichen von p; so daß die angenommenen Veränderungen der Seiten des Würfels eine Verminderung seines Inhalts bewirken: so wird die ursprüngliche Gleichung $x^3-(x+a)(x+b)(x-c)=p$.

Der Ausdruk von x für den ersten Fall wird

$$x=\frac{-ab+ac+bc\pm\sqrt{((-ab+ac+bc)^2+4(abc-p)(a+b-c))}}{2(a+b-c)};$$

welcher eine Gränze hat, oder nicht, je nachdem abc kleiner, oder größer als p ist.

Für den zweyten Fall wird $x=\frac{p-abc}{ac+bc-ab}$

für den dritten wird

$$x=\frac{-(ac+bc-ab)+\sqrt{((ac+bc-ab)^2-4(abc-p)(c-a-b))}}{c-a-b};$$

welcher Ausdruk eine Gränze hat, oder nicht, je nachdem abc größer, oder kleiner als p ist.

Dritte Voraussezung. Eine Seite des Würfels werde um die Länge a vergrößert, und die zwey andern werden um b, c vermindert.

Gleichung $(x+a)(x-b)(x-c)-x^3 = p$
oder $-xx(b+c-a)-x(ab+ac-bc)+abc=p$.

Erster Fall. $b+c$ sey $>a$.

So ist $xx(b+c-a)+x(ab+ac-bc)=abc-p$

$$x=\frac{-(ab+ac-bc)\pm\sqrt{((ab+ac-bc)^2+4(abc-p)(b+c-a))}}{2(b+c-a)}.$$

Verändert man das Zeichen von p; d. h. sollen die Veränderungen der Seiten des Würfels eine Verminderung seines Inhalts nach sich ziehen: so wird

$$x=\frac{-(ab+ac-bc)\pm\sqrt{((ab+ac-bc)^2+4(abc+p)(b+c-a))}}{2(b+c-a)}.$$

Die Fälle, in welchen die Aufgabe eine Einschränkung leidet, so wie auch diejenige, in welchen die Werthe von x positiv oder negativ sind, werden ebenso, wie in den vorhergehenden Voraussezungen, bestimmt.

Wenn x negativ ist: werden die Gleichungen

$$(-x+a)(-x-b)(-x-c)-(-x^3)=\pm p$$

aufgelöst, je nachdem der Inhalt des Würfels vermehrt, oder vermindert wird;

d. h. die Gleichungen $x^3+(a-x)(b+x)(c+x)=p$

$$x^3-(x-a)(x+b)(x+c)=\pm p.$$

Zweyter Fall. $b+c$ sey $=a$.

So wird $x=\frac{abc\mp p}{ab+ac-bc}$;

und man leitet diesen Ausdruk aus dem für den ersten Fall auf eben die Art her, wie bey der zweyten Voraussezung.

Dritter Fall. $b+c$ sey $<a$.

So ist $x=\frac{ab+ac-bc\mp\sqrt{((ab+ac-bc)^2-4(abc\mp p)(a-b-c))}}{2(a-b-c)}$;

und man bestimmt, wie in den vorhergehenden Fällen, die reelle und unmögliche, positive und negative Werthe von x.

Vierte Voraussezung. Die drey Seiten des Würfels werden um die Längen a, b, c vermindert.

Die Entwiklung dieser Voraussezung ist in der der ersten, vermöge der Anmerkungen zu derselben, enthalten.

Allgemeinere Aufgabe. Die Verhältnisse der Seiten eines rechtwinklichten Parallelepipedum, und die Veränderung seines Inhalts sind gegeben, welche dieser leidet, indem seine Seiten um gegebene Längen vergrößert oder vermindert werden. Die Seiten des Parallelepipedum finden?

Andere Aufgabe. Die Grundfläche eines rechtwinklichen Parallelepipedum ist ein Quadrat, oder ein Rectangel, dessen Seiten ein gegebenes Verhältniß haben. Man kennt die Veränderungen, welche seine Oberfläche und sein Inhalt leiden, indem seine Seiten um gegebene Längen wachsen oder abnehmen. Welches sind die Seiten des Parallelepipedum?

§. 103.

Aufgabe. Vier geometrische ProportionalZahlen finden; deren Summe der äußern, Summe der mittlern, und die Summe der Quadrate der vier Zahlen gegeben sind.

Die gegebene Summe der mittlern sey $2s$
. . . . äußern $2s'$
. . . . Quadrate $4q$.

Ben. Die Differenz der mittlern sey $2x$

So sind die mittlern Glieder $\begin{cases} s+x \\ s-x \end{cases}$

das Product der $\begin{cases} \text{mittlern} \\ \text{äußern} \end{cases}$ $ss-xx$

das Quadrat der halben Differenz der äußern $s's'-(ss-xx)$

die halbe Differenz der äußern $\sqrt{(s's'-(ss-xx))}$

die äußern Glieder $\begin{cases} s'+\sqrt{(s's'-(ss-xx))} \\ s'-\sqrt{(s's'-(ss-xx))} \end{cases}$

die Summe der Quadrate der mittlern $2(ss+xx)$

. . . . . . äußern $2(s's'+s's'-(ss-xx))$

$= 2(2s's'-ss+xx)$

die Summe der Quadrate der vier Glieder $4(s's'+xx)$

Bed. $4(s's'+xx) = 4q$

Red. $s's'+xx = q$

$$xx = q - s's'$$

$$x = \sqrt{(q-s's')}$$

$$s+x = s+\sqrt{(q-s's')}$$

$$s-x = s-\sqrt{(q-s's')}$$

$$ss-xx = ss-(q-s's') = ss+s's'-q$$

$$s's'-(ss-xx) = q-ss$$

$$\sqrt{(s's'-(ss-xx))} = \sqrt{(q-ss)}$$

$$s'+\sqrt{(s's'-(ss-xx))} = s'+\sqrt{(q-ss)}$$

$$s'-\sqrt{(s's'-(ss-xx))} = s'-\sqrt{(q-ss)}$$

Die verlangte 4 Proportionalzahlen sind also

$s'+\sqrt{(q-ss)}, s+\sqrt{(q-s's')}, s-\sqrt{(q-s's')}, s'-\sqrt{(q-ss)}$.

Die Summe der Quadrate der mittleren ist

$2ss+2(q-s's') = 2ss-2s's'+2q$

. . . der äußern $2s's'+2(q-ss) = -2ss+2s's'+2q$

. . . der 4 Zahlen $4q$

1. Anmerkung. Der Möglichkeit der Aufgabe wegen muß zugleich $q \geqq ss$, und $q \geqq s's'$ seyn.

In jeder geometrischen Proportion, deren Glieder ungleich sind, ist nämlich die Summe der Quadrate der 4 Glieder größer als das Quadrat der Summe so wohl der mittleren, als der äußeren Glieder.

Denn, wenn die 4 ungleiche Größen A, B, C, D geometrisch proportional sind: so ist

$$1)\quad BB+CC > 2BC\ (§.\,82) > 2AD$$
$$\text{also}\ AA+BB+CC+DD > AA+2AD+DD > (A+D)^2$$
$$2)\quad AA+DD > 2AD\ (§.\,82.) > 2BC$$
$$\text{folgl.}\ AA+BB+CC+DD > BB+2BC+CC > (B+C)^2.$$

2. Anmerkung. In der Benennung ist die Summe der Quadrate der 4 Glieder gefunden worden $= 4(s's'+xx)$, d. h. gleich den Quadraten die Summe der äußeren, und des Unterschieds der mittleren Glieder zusammen.

Dieser Saz läßt sich unmittelbar so beweisen:

$$(A+D)^2 = AA+2AD+DD$$
$$(B-C)^2 = BB-2BC+CC$$
$$\text{folglich}\ (A+D)^2+(B-C)^2 = AA+BB+CC+DD,$$
$$\text{weil}\ AD = BC.$$

Ebenso beweißt man, daß auch

$$(A-D)^2+(B+C)^2 = AA+BB+CC+DD.$$

Die Aufgaben: 4 geometrisch proportionale Größen finden, deren Summe der Quadrate, und die {Summe / Differenz} der {äußern / mittlern}, oder die {Differenz der äußern / Summe der mittlern} gegeben sind; sind daher beyde unbestimmt, weil die erste Bedingung durch die zwey andere bestimmt ist.

Beyspiele. 1. Es seyen $2s=14$, $2s'=18$, $4q=340$. So sind $\sqrt{(q-ss)} = \sqrt{(85-49)} = 6$

$$\sqrt{(q-s's')} = \sqrt{(85-81)} = 2$$

die mittleren Glieder $\left\{\begin{matrix}7+2\\7-2\end{matrix}\right. = \begin{matrix}9\\5\end{matrix}$

die äußern . . $\left\{\begin{matrix}9+6\\9-6\end{matrix}\right. = \begin{matrix}15\\3\end{matrix}$

folglich die vier ProportionalZahlen 3, 5, 9, 15.

2. Es seyen $2s=22$, $2s'=26$, $4q=740$.

3. $2s=14$, $2s'=16$, $4q=260$.

Andere Aufgaben. 4 geometrisch proportionale Größsen finden; deren Unterschied der äußeren, Unterschied der mittleren, und die Summe der Quadrate der 4 Glieder gegeben sind.

4 geometrische Proportionalzahlen finden; deren Summe der äußeren, Summe der mittleren, und der Ueberschuß der Summe der Quadrate der äußeren über die Summe der Quadrate der mittleren gegeben sind. (Ist unbestimmt.)

4 geometrische ProportionalZahlen finden; deren Unterschied der äußeren, Unterschied der mittleren, und der Ueberschuß der Summe der Quadrate der äußern über die Summe der Quadrate der mittleren gegeben sind. (Ist unbestimmt.)

4 geometrische Proportional-Zahlen finden, deren $\left\{\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{matrix}\right\}$ der äußern, $\left\{\begin{matrix}\text{Differenz}\\ \text{Summe}\end{matrix}\right\}$ der mittleren, und der Ueberschuß der Summe der Quadrate der äußeren über die Summe der Quadrate der mittleren gegeben sind.

§. 104.

Aufgabe. 4 geometrisch proportionale Größen finden; deren Summe, Summe ihrer Quadrate, und die Summe ihrer Würfel gegeben sind.

Die gegebene Summe der 4 Größen sey $2s$
. . . . ihrer Quadrate $4q$
. . . . ihrer Würfel $2c$

Ben. Die Summe der mittleren Glieder sey $2x$
der Unterschied . . . . . $2y$

So sind die mittleren Glieder. $\left\{\begin{matrix}x+y\\ x-y\end{matrix}\right.$

das Product der $\left\{\begin{matrix}\text{mittleren}\\ \text{äußeren}\end{matrix}\right\}$ Glieder $xx-yy$

die Summe der äußeren Glieder $2s-2x$

das Quadrat der halben Differenz der äußeren Glieder $(s-x)^2-(xx-yy)$
$= ss-2sx+yy$

die halbe Differenz der äußern Glieder $\sqrt{(ss-2sx+yx)}$

die äußeren Glieder $\left\{\begin{matrix}s-x+\sqrt{(ss-2sx+yy)}\\ s-x-\sqrt{(ss-2sx+yy)}\end{matrix}\right.$

die Summe der Quadrate

der mittleren Glieder $2xx+2yy$

der äußeren . . $4ss-8sx+2xx+2yy$

der vier . . . $4ss-8sx+4xx+4yy$
$= (2s-2x)^2+4yy$

die Summe der Würfel

der mittleren Glieder $2x^3+6xyy$

der äußeren . . $2(s-x)^3+6(s-x)(ss-2sx+yy)$

der vier . . . $8s^3-24ssx+18sxx+6syy$

Bed. $\left\{\begin{matrix}(2s-2x)^2+4yy & =4q\\ 8s^3-24ssx+18sxx+6syy & =2c\end{matrix}\right.$

Red. $\left\{\begin{matrix}ss-2sx+xx+yy & =q\\ 4s^3-12ssx+9sxx+3syy & =c\end{matrix}\right.$

$$\left\{\begin{matrix}3s^3-\ \ 6ssx+3sxx+3syy=3qs\\ 4s^3-12ssx+9sxx+3syy=c\end{matrix}\right.$$

$$s^3-\ \ 6ssx+6sxx \quad =c-3qs$$

$$36ssxx-36s^3x+6s^4 \quad =6cs-18qss$$

$$36ssxx-36s^3x+9s^4 \quad =6cs-18qss+3s^4$$

$$6sx-3ss \quad =\pm\sqrt{(6cs-18qss+3s^4}$$

$$x = \frac{3ss \pm \sqrt{(6cs - 18qss + 3s^4)}}{6s}$$

$$s - x = \frac{3ss \mp \sqrt{(6cs - 18qss + 3s^4)}}{6s}$$

$$yy = q - \left(\frac{3ss \mp \sqrt{(6cs - 18qss + 3s^4)}}{6s}\right)^2$$

$$ss - 2sx + yy = \begin{cases} ss - \frac{6s^3 \pm 2s\sqrt{(6cs - 18qss + 3s^4)}}{6s} \\ + q - \left(\frac{3ss \mp \sqrt{(6cs - 18qss + 3s^4)}}{6s}\right)^2 \end{cases}$$

$$= q \mp \frac{2s\sqrt{(6cs - 18qss + 3s^4)}}{6s} - \frac{12s^4 + 6cs - 18qss \mp 6ss\sqrt{(6cs - 18qss + 3s^4)}}{36ss}$$

$$= q - \frac{12s^4 + 6cs - 18qss \pm 6ss\sqrt{(6cs - 18qss + 3s^4)}}{36ss}$$

$$= q - \left(\frac{3ss \pm \sqrt{(6cs - 18qss + 3s^4)}}{6s}\right)^2$$

$$y = \pm\sqrt{\left(q - \left(\frac{3ss \mp \sqrt{(6cs - 18qss + 3s^4)}}{6s}\right)^2\right)}$$

$$\sqrt{(ss - 2sx + yy)} = \pm\sqrt{\left(q - \left(\frac{3ss \pm \sqrt{(6cs - 18qss + 3s^4)}}{6s}\right)^2\right)}$$

1. Anmerkung. Diese Aufgabe hat das Merkwürdige, daß sie, ob sie sich gleich auf eine Gleichung vom zweyten Grade reduciren läßt, dennoch acht Auflösungen annimmt.

Nämlich x hat zwey Werthe; und jedem dieser Werthe von x entsprechen zwey Werthe von y: so ergeben sich 4 Werthe für jedes mittlere Glied. Diese 4 Werthe reduciren sich aber auf zwey, insofern man die mittlere Glieder verwechseln kann.

Ebenso entsprechen jedem der zwey Werthe von s—x, oder von der halben Summe der äußeren Glieder (welche wechselsweise einerley ist mit der halben Summe x der mittleren) zwey Werthe der halben Differenz der äußeren; die-

semnach ergeben sich auch 4 Werthe für jedes äußere Glied. Die zwey äußeren Glieder lassen sich aber verwechseln: und so reduciren sich diese 4 Werthe auf 2.

2. Anmerkung Damit die Summe sowohl der mittleren als der äußeren Glieder reel ist;

muß $$6cs - 18qss + 3s^4 \overline{\gtrless} 0$$

$$q \overline{\lessgtr} \frac{2c + s^3}{6s}$$ seyn.

Und damit die Differenz beydes der mittleren, und der äußeren Glieder reel ist;

muß $$q \overline{\gtrless} \left(\frac{3ss \pm \sqrt{(6cs - 18qss + 3s^4)}}{6s}\right)^2$$

und daher $$q \overline{\gtrless} \frac{(s\sqrt{s} \pm \sqrt{c})^2}{9s}$$ seyn.

Beyspiel. Es seyen $2s = 24$; $s = 12$

$4q = 260 \quad q = 65$

$2c = 3528 \quad c = 1764$

So sind $$x = \frac{432 \pm \sqrt{(127008 - 168480 + 62208)}}{72} = \frac{432 \pm 144}{72}$$

$$= 6 \pm 2 = \begin{cases} 8 \\ 4 \end{cases}$$

$$s - x = \begin{cases} 4 \\ 8 \end{cases}$$

$$yy = 6s - \begin{cases} 4^2 \\ 8^2 \end{cases} = \begin{cases} 49 \\ 1 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \pm 7 \\ \pm 1 \end{cases}$$

die mittleren Glieder $\begin{cases} 8 \pm 7 \\ 4 \pm 1 \end{cases} = \begin{cases} 15, & 5 \\ 1, & 3 \end{cases}$

die äußeren $\begin{matrix} 5, & 15 \\ 3, & 1 \end{matrix}$

Man hat also die 8 Proportionen

15,	5,	3,	1
15,	3,	5,	1
1,	5,	3,	15
1,	3,	5,	15
5,	15,	1,	3
5,	1,	15,	3
3,	15,	1,	5
3,	1,	15,	5;

welche aber aus den nämlichen Gliedern bestehen, und sich nur durch die Stellung der mittleren und äußeren unterscheiden.

§. 105.

Ich endige diesen Abschnitt mit einigen allgemeinen Bemerkungen über die Gleichungen vom zweyten Grade.

Nach Wegschaffung jedes Coefficienten von dem Quadrat der unbekannten Größe, und Stellung der Glieder, so daß dieses Quadrat das Additionszeichen vor sich hat, reduciren sich die Gleichungen vom zweyten Grade auf eine der 4 folgenden Formen:

1°. $xx + 2px + q = 0$

2°. $xx + 2px - q = 0$

3°. $xx - 2px + q = 0$

4°. $xx - 2px - q = 0$.

Es sey 1°. $xx + 2px + q = 0$: so erhält man

$$xx + 2px + pp = pp - q$$
$$x + p = \pm\sqrt{(pp - q)}$$
$$x = -p \pm \sqrt{(pp - q)}$$

Es sey 2°. $xx + 2px - q = 0$: so erhält man

$$xx + 2px + pp = pp + q$$
$$x + p = \pm\sqrt{(pp + q)}$$
$$x = -p \pm \sqrt{(pp + q)}$$

Es sey 3°. $xx - 2px + q = 0$: so erhält man

$$x - 2px + pp = pp - q$$
$$x - p = \pm\sqrt{(pp - q)}$$
$$x = p \pm \sqrt{(pp - q)}$$

Es sey 4°. $xx - 2px - q = 0$: so erhält man

$$xx - 2px + pp = pp + q$$
$$x - p = \pm\sqrt{(pp + q)}$$
$$x = p \pm \sqrt{(pp + q)}$$

Bey der ersten und dritten Form, in welchen das absolute (bekannte, von den unbekannten Größe unabhängige) Glied q positiv ist, haben Gränzen statt; und pp muß $\geqq$ q seyn, damit die Aufgabe möglich ist. Die zwey andere Formen aber geben immer mögliche Werthe von x.

Beyde Werthe von x sind nach der ersten Form negativ.

Von den zwey Werthen von x für die zweyte Form ist der erste positiv, der zweyte negativ.

Beyde Werthe von x der dritten Form sind positiv.

Von den zwey Werthen von x in der vierten Form ist der erste positiv, der zweyte negativ.

Durch Veränderung der Zeichen verwandeln sich der erste und zweyte Ausdruk von x nach der ersten Form in den zweyten und ersten Werth von x nach der dritten Form: und ebenso verhalten sich die Ausdrücke von x nach der zweyten und vierten Form gegen einander. Nämlich bey einerley Zeichen von q, aber verschiedenen Zeichen von p, sind die Werthe der unbekannten Größe, das Zeichen beyseite gesezt, die nämlichen; oder die positiven Werthe verwandeln sich nur in negative, und umgekehrt.

Bezeich=

Bezeichnet man die zwey Werthe der unbekannten Größe durch x, x':

so sind, nach der 1ten Form,

$$x = -p + \sqrt{(pp - q)}$$
$$x' = -p - \sqrt{(pp - q)}$$
$$\overline{x + x' = -2p}$$
$$xx' = +q$$

nach der 2ten Form,

$$x = -p + \sqrt{(pp + q)}$$
$$x' = -p - \sqrt{(pp + q)}$$
$$\overline{x + x' = -2p}$$
$$xx' = -q$$

nach der 3ten Form,

$$x = +p + \sqrt{(pp - q)}$$
$$x' = +p - \sqrt{(pp - q)}$$
$$\overline{x + x' = +2p}$$
$$xx' = +q$$

nach der 4ten Form,

$$x = +p + \sqrt{(pp + q)}$$
$$x' = +p - \sqrt{(pp + q)}$$
$$\overline{x + x' = +2p}$$
$$xx' = -q.$$

Die Summe der zwey Werthe der unbekannten Größe ist also der Coefficient des zweyten Glieds der Gleichung mit verändertem Zeichen; und das Product der zwey Werthe ist das absolute Glied mit seinem Zeichen.

Versezt man die Werthe der unbekannten Größe auf die linke Seite der Gleichung, so daß man hat

für die 1te Form | für die 2te

$$x + p - \sqrt{(pp - q)} = 0; \quad x + p - \sqrt{(pp + q)} = 0;$$
$$x + p + \sqrt{(pp - q)} = 0; \quad x + p + \sqrt{(pp + q)} = 0;$$

für die 3te | für die 4te

$$x - p - \sqrt{(pp - q)} = 0; \quad x - p - \sqrt{(pp + q)} = 0;$$
$$x - p + \sqrt{(pp - q)} = 0; \quad x - p + \sqrt{(pp + q)} = 0;$$

und nimmt man die Producte der linker Hand stehenden Größen: so erhält man

$$xx + 2px + q = 0; \quad xx + 2px - q = 0;$$
$$xx - 2px + q = 0; \quad xx - 2px - q = 0.$$

Werden demnach die eine Gleichung vom zweyten Grade ausmachenden Größen so auf Gleichheit mit Null gebracht, daß das Quadrat der unbekannten Größe positiv ist, und

keinen Coefficienten hat: so läßt sich diese gleich Null gemachte Größe in zwey reelle oder imaginäre Factoren vom ersten Grade, x+a, x+b, zerfällen; deren Theile a, b, mit veränderten Zeichen, die Werthe der unbekannten Grösse sind.

Dritter Abschnitt.

Von den biquadratischen Gleichungen, die sich auf den zweyten Grad reduciren lassen.

§. 106.

Unreine Gleichungen vom vierten Grade, welche nur die vierte und zweyte Potenz der unbekannten Größe enthalten, und deren allgemeine Form ist

$$x^4 \pm 2pxx \pm q = 0,$$

werden wie die Gleichungen von dem zweyten Grade behandelt.

Sezt man nemlich $xx = z$: so verwandelt sich jene Gleichung in die vom zweyten Grade

$$zz \pm 2pz \pm q = 0$$

Die aus dieser gefolgerten Werthe von z sind daher die Werthe von xx; und durch Ausziehung der Quadratwurzeln aus denselben findet man die Werthe von x. Da man nun vor die Quadratwurzel sowohl das Zeichen der Addition, als das der Subtraction sezen kann; und das Quadrat von x zwey Werthe hat: so ergeben sich 4 Werthe von x.

Einige wenige Beyspiele werden dieses hinlänglich erläutern.

§. 107.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden, deren Product p, und die Summe ihrer Quadrate 2q gegeben sind.

Ben. Erste Zahl . . . x Quadrate derselben xx

zweyte . . . . $\frac{p}{x}$ $\frac{pp}{xx}$

Bed. $xx + \frac{pp}{xx} = 2q.$

Red. $x^4 + pp = 2qxx$

$x^4 - 2qxx + pp = 0.$

Behandelt man diese Gleichung wie eine vom zweyten Grade, deren unbekannte Größe xx ist; so erhält man

$$x^4 - 2qxx + qq = qq - pp$$
$$xx - q = \pm\sqrt{(qq-pp)}$$
$$xx = q \pm \sqrt{(qq-pp)}$$

Aufl. $$x = \pm\sqrt{(q \pm \sqrt{(qq-pp)})}$$

$$\frac{p}{x} = \frac{p}{\pm\sqrt{(q\pm\sqrt{(qq-pp)})}}$$

$$= \pm\frac{p}{\sqrt{(q\pm\sqrt{(qq-pp)})}} = \pm\frac{p\sqrt{(q\mp\sqrt{(qq-pp)})}}{\sqrt{(qq-(qq-pp))}}$$

$$= \pm\sqrt{(q\mp\sqrt{(qq-pp)})}$$

Die unbekannte Größe x hat also 4 Werthe, denen ebenso viel Werthe von $\frac{p}{x}$ entsprechen: es sind nämlich

die Werthe von x	die Werthe von $\frac{p}{x}$
$+\sqrt{(q+\sqrt{(qq-pp)})}$	$+\sqrt{(q-\sqrt{(qq-pp)})}$
$+\sqrt{(q-\sqrt{(qq-pp)})}$	$+\sqrt{(q+\sqrt{(qq-pp)})}$
$-\sqrt{(q+\sqrt{(qq-pp)})}$	$-\sqrt{(q-\sqrt{(qq-pp)})}$
$-\sqrt{(q-\sqrt{(qq-pp)})}$	$-\sqrt{(q+\sqrt{(qq-pp)})}$

Der erste und dritte, zweyte und vierte Werth von x sind nur durch das Zeichen von einander unterschieden. Der erste, zweyte, dritte, vierte Werth von x sind der zweyte, erste, vierte, dritte Werth von $\frac{p}{x}$.

Gränze. Damit die Aufgabe möglich ist; muß $qq \overline{\overline{>}} pp$, $q \overline{\overline{>}} p$ seyn. Die halbe Summe der Quadrate zweyer Zahlen ist nämlich ihrem Product gleich, oder grösser als dieses (§. 83.)

Anmerkung. In dem 83. §. ist diese Aufgabe auf eine andere Art aufgelöst, und auf die Untersuchung der Summe und des Unterschieds der zwey verlangten Zahlen zurükgeführt worden. Die dorten erhaltene Ausdrücke dieser Zahlen sind auch anders ausgefallen. Z. B. für x ist gefunden worden $\pm\sqrt{\frac{q+p}{2}} \pm \sqrt{\frac{q-p}{2}}$.

Es ist aber $\sqrt{(q+\sqrt{(qq-pp)})} = \sqrt{\frac{q+p}{2}} + \sqrt{\frac{q-p}{2}}$.

Denn $$q = \frac{q+p}{2} + \frac{q-p}{2}$$

und $$\sqrt{(qq-pp)} = 2\sqrt{\frac{qq-pp}{4}}$$
$$= 2\sqrt{\left(\frac{q+p}{2} \times \frac{q-p}{2}\right)}$$

folglich $$q+\sqrt{(qq-pp)} = \frac{q+p}{2} + 2\sqrt{\left(\frac{q+p}{2} \times \frac{q-p}{2}\right)} + \frac{q-p}{2}$$
$$= \left(\sqrt{\frac{q+p}{2}} + \sqrt{\frac{q-p}{2}}\right)^2$$

und $$\sqrt{(q+\sqrt{(qq-pp)})} = \sqrt{\frac{q+p}{2}} + \sqrt{\frac{q-p}{2}}.$$

Ebenso beweißt man die Einerleyheit der übrigen Werthe.

§. 108.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden; deren Product p, und die Differenz ihrer Quadrate $2q$ gegeben sind.

Bez. Erste Zahl . . . x — zweyte . . . $\frac{p}{x}$ — Quadrate derselben xx, $\frac{pp}{xx}$

Bed. $xx - \frac{pp}{xx} = 2q$.

Red.
$$x^4 - pp = 2qxx$$
$$x^4 - 2qxx - pp = 0$$
$$x^4 - 2qxx + qq = qq + pp$$
$$xx - q = \pm\sqrt{(qq+pp)}$$
$$xx = q \pm \sqrt{(qq+pp)}$$

Aufl.
$$x = \pm\sqrt{(q \pm \sqrt{(qq+pp)})}$$
$$\frac{p}{x} = \pm\frac{p}{\sqrt{(q \pm \sqrt{(qq+pp)})}}$$
$$= \pm\frac{p\sqrt{(-q \pm \sqrt{(qq+pp)})}}{\sqrt{(-qq+(qq+pp))}}$$
$$= \pm\sqrt{(-q \pm \sqrt{(qq+pp)})}$$
$$xx = q \pm \sqrt{(qq+pp)}$$
$$\frac{pp}{xx} = -q \pm \sqrt{(qq+pp)}$$
$$xx - \frac{pp}{xx} = 2q.$$

Anmerkung. Die zwey auf das subtractive Zeichen von $\sqrt{(qq + pp)}$ sich beziehenden Werthe von x und von $\frac{p}{x}$ sind imaginär. Ihre zwey reellen Werthe unterscheiden sich nur durch das vorgesezte Zeichen von einander: und, dieses beyseite gesezt, hat man

$$x = \sqrt{(q+\sqrt{(qq+pp)})}$$
$$\frac{p}{x} = \sqrt{(-q+\sqrt{(qq+pp)})};$$

welche Werthe reell und positiv sind.

Beyspiel. Es seyen $p=195$, $2q=56$, $q=28$.

So sind
$$qq = 784$$
$$pp = 38025$$
$$qq+pp = 38809$$
$$\sqrt{(qq+pp)} = 197$$
$$q+\sqrt{(qq+pp)} = 225$$
$$-q+\sqrt{(qq+pp)} = 169$$
$$x=\sqrt{(q+\sqrt{(qq+pp)})} = 15$$
$$\frac{p}{x}=\sqrt{(-q+\sqrt{(qq+pp)})} = 13.$$

§ 109.

Unter Voraussezung der Ausziehung der Wurzeln jedes Grads aus bekannten Größen kann man überhaupt die Gleichungen von der Form $x^{2m} \pm 2px^m \pm q = 0$ auf eben die Art, wie die quadratische, behandeln; indem man x^m als die unbekannte Größe betrachtet, deren Quadrat x^{2m} ist.

Beyspiel. Zwey Zahlen finden; deren Product p, und die Summe oder der Unterschied ihrer Würfel 2c gegeben sind.

Ben. Erste Zahl . . . x x^3
zweyte . . . $\frac{p}{x}$ Würfel derselben $\frac{p^3}{x^3}$

Bed. $x^3 \pm \frac{p^3}{x^3} = 2c.$

Red. $x^6 \pm p^3 = 2cx^3$

$$x^6 - 2cx^3 \pm p^3 = 0$$

$$x^6 - 2cx^3 + cc = cc \mp p^3$$

$$x^3 - c = \pm\sqrt{(cc \mp p^3)}$$

$$x^3 = c \pm \sqrt{(cc \mp p^3)}$$

$$\frac{p^3}{x^3} = \frac{p^3}{c \pm \sqrt{(cc \mp p^3)}} = c \mp \sqrt{(cc \mp p^3)}$$

Ueberhaupt führt die Aufgabe: Zwey Zahlen finden, deren Product p, und die Summe oder die Differenz 2q ihrer mten Potenzen gegeben sind; auf die Gleichung

$$x^m \pm \frac{p^m}{x^m} = 2q$$

oder $x^{2m} - 2qx^m \pm p^m = 0$,

welche als quadratisch betrachtet wird, unter der Voraussezung, daß man die Wurzel des mten Grads aus gegebenen Größen ausziehen könne.

§. 110.

Aufgabe. Zwey Zahlen finden; deren Summe 2s, und die Summe ihrer vierten Potenzen 2q gegeben sind.

Ohne die Anwendung des kleinen Kunstgriffs, statt der Zahlen selbst ihren Unterschied zu suchen, erhellet nicht unmittelbar, wie die Aufgabe sich auf den zweyten Grad zurükführen lasse.

Ben. Gesuchte Differenz der zwey Zahlen 2d

Gesuchte Zahlen $\begin{cases} s+d \\ s-d \end{cases}$

Vierte Potenzen derselben $\begin{cases} s^4 + 4s^3d + 6s^2d^2 + 4sd^3 + d^4 \\ s^4 - 4s^3d + 6s^2d^2 - 4sd^3 + d^4 \end{cases}$

Summe $2s^4 + 12s^2d^2 + 2d^4$

Bed. $2s^4 + 12s^2d^2 + 2d^4 = 2q$.

Red. $s^4 + 6s^2d^2 + d^4 = q$

$$d^4 + 6s^2d^2 + 9s^4 = q + 8s^4$$

$$d^2 + 3s^2 = \pm\sqrt{(q + 8s^4)}$$

$$d^2 = -3s^2 \pm \sqrt{(q + 8s^4)}$$

Aufl. $d \quad = \pm\sqrt{(-3s^2 \pm \sqrt{(q+8s^4)})}$

$s+d \quad = s \pm \sqrt{(-3s^2 \pm \sqrt{(q+8s^4)})}$

$s-d \quad = s \mp \sqrt{(-3s^3 \pm \sqrt{(q+8s^4)})}$

1. Anme kung. Der auf das negative Zeichen von $\sqrt{(q+8s^4)}$ sich beziehende Werth ist imaginär. Und damit der auf das positive Zeichen dieser Wurzel sich beziehende Werth reel sey, muß $\sqrt{(q+8s^4)} \geqq 3s^2$, folglich $q+8s^4 \geqq 9s^4$, $q \geqq s^4$ seyn. Die halbe Summe der vierten Potenzen zweyer Zahlen ist nämlich der vierten Potenz ihrer halben Summe gleich, oder größer als dieselbe; wie die Gleichung $q = \frac{(s+d)^4 + (s-d)^4}{2} = s^4 + d^2(6s^2 + d^2)$ ausweiset.

2. Anmerkung. Mittelst der Gleichung $s^4+6s^2d^2+d^4 = q$, wird s durch q und d ebenso bestimmt, wie d durch s und q ausgedrükt worden ist.

3. Anmerkung. Die Aufgabe: Zwey Größen finden, deren Summe oder Differenz, und der Unterschied ihrer vierten Potenzen gegeben sind; ist von einer höheren Ordnung als die in diesem Capitel behandelten.

4. Anmerkung. Auf den zweyten Grad lassen sich noch folgende Aufgaben zurükführen:

Zwey Größen finden, deren Summe, und die Summe ihrer fünften Potenzen gegeben sind;

Zwey Größen finden, deren Differenz, und die Differenz ihrer fünften Potenzen gegeben sind.

Die Aufgaben: zwey Zahlen finden, deren $\left\{\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{matrix}\right.$, und die $\left\{\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{matrix}\right.$ ihrer Würfel gegeben sind, führen auf reine Gleichungen vom zweyten Grade. Aber die Aufgaben: zwey Zahlen finden, deren $\left\{\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{matrix}\right.$, und die $\left\{\begin{matrix}\text{Differenz}\\ \text{Summe}\end{matrix}\right.$ ihrer Würfel gegeben sind; führen auf höhere Gleichungen, als die in diesem Capitel aufgelösten sind.

§ 111.

Die in diesem lezten Abschnitt aufgelöste Gleichungen führen auf Werthe des Quadrats der unbekannten Größe

von der Form $a \pm \sqrt{b}$; daher der Werth der unbekannten Größe selbst $\sqrt{(a \pm \sqrt{b})}$ ist. Das Beyspiel §. 107. zeigt: daß die auf einander folgende zweymalige Wurzelausziehung, welche dieser Ausdruk zu erfordern scheint, vermieden, und die Bestimmung der unbekannten Größe auf einfache Wurzelausziehungen reducirt werden könne. Um das Merkmal, woran man die Möglichkeit dieser Veränderung erkennen kann, darzustellen, will ich einige Beyspiele vorausschicken.

1. Beyspiel. Man soll die Quadratwurzel aus $3 + 2\sqrt{2}$ angeben.

Zu diesem Ende erinnere man sich: daß das Quadrat der $\begin{Bmatrix}\text{Summe}\\\text{Differenz}\end{Bmatrix}$ zweyer Zahlen die $\begin{Bmatrix}\text{Summe}\\\text{Differenz}\end{Bmatrix}$ ist von der Summe ihrer Quadrate und ihrem doppelten Product; daß $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$. Da die Quadrate einfacher (nur aus einem Glied bestehender) irrationeller Größen vom zweyten Grade rationell; hingegen ihre Producte durch andere rationelle oder irrationelle Größen irrationell sind: so wird man hiedurch veranlaßt, 3 anzusehen als die Summe der Quadrate zweyer Zahlen, deren eine wenigstens irrationell von dem zweyten Grade ist, und $2\sqrt{2}$ als das doppelte Product jener zwey Zahlen. Bezeichnet man also die zwey Theile der gesuchten Wurzel durch $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$; so erhält man die zwey Gleichungen:

$$x + y = 3$$
$$2\sqrt{xy} = 2\sqrt{2}.$$

Hieraus folgt
$$(x+y)^2 = 9$$
$$4xy = 8$$
$$\overline{(x-y)^2 = 1}$$
$$x - y = 1$$

Da nun
$$x + y = 3:$$

so sind
$$2x = 4, \quad x = 2$$
$$2y = 2; \quad y = 1$$
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2} + 1$$

Und wirklich ist $(\sqrt{2} + 1)^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$.
Ebenso ist $(\sqrt{2} - 1)^2 \qquad = 3 - 2\sqrt{2}$.

2. Beyspiel. Man verlangt die Quadratwurzel aus $5+2\sqrt{6}$.

$$\begin{aligned}
\text{Bedingungen:}\quad x+y &= 5\\
2\sqrt{xy} &= 2\sqrt{6}\\
\text{folglich}\quad (x+y)^2 &= 25\\
4xy &= 24\\
\hline
(x-y)^2 &= 1\\
x-y &= 1\\
x+y &= 5\\
\hline
2x &= 6;\quad x=3\\
2y &= 4;\quad y=2
\end{aligned}$$

$$\sqrt{x}\pm\sqrt{y}=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$$

Wirklich ist $(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})^2=3\pm2\sqrt{6}+2=5\pm2\sqrt{6}$.

Allgemein sey von $a\pm\sqrt{b}$ die Quadratwurzel anzugeben.

$$\begin{aligned}
\text{Bedingungen:}\quad x+y &= a\\
2\sqrt{xy} &= \sqrt{b}\\
\text{folglich}\quad (x+y)^2 &= aa\\
4xy &= b\\
\hline
(x-y)^2 &= aa-b\\
x-y &= \sqrt{(aa-b)}\\
\text{Da nun}\quad x+y &= a\\
\hline
\text{so sind}\quad 2x &= a+\sqrt{(aa-b)};\quad \sqrt{x}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}}\\
2y &= a-\sqrt{(aa-b)};\quad \sqrt{y}=\sqrt{\frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}}
\end{aligned}$$

$$\sqrt{x}\pm\sqrt{y}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}}$$

wirklich ist $\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}}\right)^2$

$$=\frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}\pm2\sqrt{\frac{aa-(aa-b)}{4}}+\frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}$$

$$=a\quad\pm\sqrt{b}$$

1. Anmerkung. Die vorgegebene Untersuchung ist also auf die §. 83. und 107. aufgelöste Aufgabe redu=

cirt: zwey Zahlen finden, deren Product und die Summe ihrer Quadrate gegeben sind.

2. Anmerkung. Zur Erhaltung des Hauptzweks, die Wurzel von dem doppelten IrrationalitätsZeichen zu befreyen, wird erfordert, daß $aa - b$ ein Quadrat sey: wie dieses in den vorhergehenden Beyspielen, und in den Ausdrüken §. 107. statt hat, wo $a = q$, $b = qq - pp$, $aa - b = pp$ ist.

3. Anmerkung. Wenn $aa - b$ nicht nur kein Quadrat, sondern auch eine negative Grösse ist; so entstehen durch die Zerfällung der gesuchten Wurzel in zwey Theile Formeln, die mit dem Zeichen der Unmöglichkeit behaftet sind. Dies ist z. B. der Fall der Ausdrüke §. 108: wo

$$x = \sqrt{(q \pm \sqrt{(qq + pp)})};$$

$$a = q$$

$$b = qq + pp$$

$$aa - b = -pp$$

$$\sqrt{(aa - b)} = p\sqrt{-1}$$

folglich $\sqrt{(q + \sqrt{(qq \pm pp)})} = \sqrt{\frac{q + p\sqrt{-1}}{2}} \pm \sqrt{\frac{q - p\sqrt{-1}}{2}}$

In diesen Fällen wird durch die Zerfällung der Wurzel in zwey Theile ihr Ausdruk nicht nur nicht vereinfacht, sondern in doppelter Rüksicht verwikelter gemacht.

Drukfehler.

S. 188 lies in der Aufschrift vom 5ten Capitel: Aufgaben vom zweiten statt vom ersten Grade.